UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215217 9

HANDBUCH
ER ANGEWANDTEN MATHEMATIK
RAUSGEGEBEN VON H. E. TIMERDING
II

DARSTELLENDE GEOMETRIE

VON

JOHANNES HJELMSLEV

VERLAG B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN

HANDBUCH
DER ANGEWANDTEN MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

Dr. H. E. TIMERDING

O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN BRAUNSCHWEIG

In mehreren Teilen. Mit vielen Textfiguren. 8. In Leinwand gebunden.

Das Werk, dessen drei erste Teile hiermit herausgegeben werden, ist bestimmt, die gesamte angewandte Mathematik in einer für die Studierenden der Universitäten und der Technischen Hochschulen gleich brauchbaren Form zu behandeln. Als angewandte Mathematik bezeichnen wir alle die Zweige der Mathematik, die zwischen der theoretischen Entwicklung und der wirklichen Anwendung auf technische und naturwissenschaftliche Probleme liegen. Hierbei ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß, wo die theoretische Entwicklung für die Anwendungen nicht ausreicht, sie in passender Weise ergänzt werden muß. Vor allen Dingen ist angewandte Mathematik eigentliche Mathematik, nicht Physik oder Technik; sie ist nur Mathematik, die nach den Anwendungsgebieten und den praktischen Zwecken orientiert ist. Danach bestimmt sich der methodische Charakter des vorliegenden Werkes und die Abgrenzung seiner einzelnen Teile. Dienlich wird es sich jedem erweisen, für den der praktische Gebrauch der Mathematik, in irgend einer Hinsicht und aus irgend einem Grunde, Interesse hat.

I. PRAKTISCHE ANALYSIS

VON

Dr. HORST VON SANDEN

PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Der erste, praktische Analysis betitelte Band des Handbuches der angewandten Mathematik enthält die numerischen und graphischen Rechenmethoden, die bei der Durchführung mathematischer Probleme bis zur zahlenmäßigen Berechnung, wie sie beispielsweise in der Praxis des Ingenieurs und messenden Physikers verlangt wird, zur Anwendung gelangen, und damit die Grundlagen der angewandten Mathematik überhaupt.

Es werden u. a. behandelt die Auflösung von algebraischen und transzendenten Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten, Interpolation, Differentiation und Integration empirischer Funktionen, die Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Von Rechenhilfsmitteln werden der Rechenschieber und die Rechenmaschinen eingehend besprochen. Zahlreiche durchgerechnete Beispiele zeigen die praktische Brauchbarkeit der Methoden. Die Auswahl des Stoffes ist so getroffen, daß künftige Lehrer der Mathematik, Ingenieure und Physiker das Buch mit gleichem Nutzen studieren können.

Deighton, Bell & Co. Ltd.
Cambridge, Eng.

II. DARSTELLENDE GEOMETRIE

VON

Dr. JOHANNES HJELMSLEV

O. PROFESSOR DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE AN
DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN KOPENHAGEN

Die vorliegende Behandlung der darstellenden Geometrie, die wesentlich für Studierende der Universitäten bestimmt ist, ist von dem Gesichtspunkte aus entstanden, daß die darstellende Geometrie dazu berufen sein könnte, die naturgemäße Einleitung zum Studium der höheren Geometrie überhaupt zu bilden. Als Grundlage der Konstruktionen im Raume dient die einfache senkrechte Projektion auf die Zeichenebene; hiernach ergibt sich die doppelte Projektion ganz von selbst und die anderen Methoden schließen sich eng daran an. Für die Kurvenlehre in der Ebene und im Raume werden ganz neue Grundlagen gegeben, die allgemeiner, natürlicher und vollständiger sind als die Entwicklungen, die man in den analytischen Darstellungen der Infinitesimalgeometrie gewöhnlich findet. Überhaupt wird auf die wissenschaftliche und übersichtliche Behandlung besonderer Wert gelegt, der Übergang zu den technischen Anordnungen wird aber gleichzeitig klar, wenn auch kurz bezeichnet.

III. GRUNDZÜGE DER GEODÄSIE UND ASTRONOMIE

VON

Dr. MARTIN NÄBAUER

O. PROF. DER GEODÄSIE AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BRAUNSCHWEIG

Dieser Band, welcher sich in erster Linie an den Mathematiker wendet, besteht aus folgenden 4 Teilen:

Im 1. Teil wird die „Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate“, die unentbehrliche Hilfswissenschaft der Geodäsie und Astronomie, behandelt und durch Beispiele erläutert.

Der 2. Teil „Niedere Geodäsie“ befaßt sich mit den Aufgaben der Feldmessung. Insbesondere werden die Methoden der Geländeaufnahmen, die Verarbeitung der Aufnahmen und die gebräuchlichsten Absteckungsmethoden behandelt.

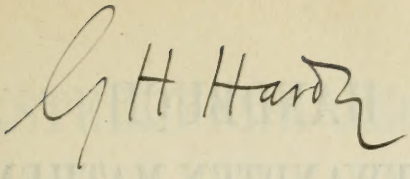
Der 3. Teil „Höhere Geodäsie“ geht zunächst auf die Aufgaben der Landesvermessung ein, wobei die Kugel als Projektionsfläche dient. Daran reiht sich die Betrachtung der Erde als Rotationsellipsoid, die Ermittlung der Ellipsoidkonstanten, die Rechnung auf dem Ellipsoid und dessen Abbildung. Den Schluß dieses Teiles bildet die Besprechung des Geoids.

Der 4. Teil endlich „Grundzüge der Astronomie“ behandelt zunächst die Grundbegriffe der theoretischen Astronomie, um hierauf etwas ausführlicher auf die Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung einzugehen, welche durch Beispiele erläutert werden.

Weiter werden zunächst folgen:

IV. Die graphischen Methoden der technischen Mechanik.

V. Mathematische Statistik und Versicherungsrechnung.



HANDBUCH
DER ANGEWANDTEN MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

Dr. H. E. TIMERDING

O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN BRAUNSCHWEIG

ZWEITER TEIL

DARSTELLENDE GEOMETRIE

VON

J. HJELMSLEV

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1914

DARSTELLENDE GEOMETRIE

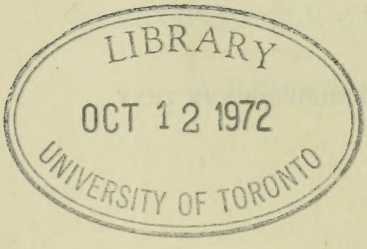
VON

Dr. JOHANNES HJELMSLEV
O. PROFESSOR DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE AN
DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN KOPENHAGEN

MIT 305 ABBILDUNGEN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1914

QA
501
H5



COPYRIGHT 1914 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

VORWORT DES HERAUSGEBERS

Während für die „praktische Analysis", die den ersten Band dieses Handbuches bildet, kaum auf eine vorliegende erschöpfende Darstellung verwiesen werden konnte und auch eine kurze Zusammenstellung der mathematischen Grundlagen von Geodäsie und Astronomie, wie sie der binnen kurzem erscheinende dritte Band gibt, nirgends zu finden ist, gibt es für die darstellende Geometrie, welcher der vorliegende zweite Band gewidmet ist, eine Fülle von Lehrbüchern. Trotzdem ist, was hier geboten wird, wie ich glaube, in keinem der vorhandenen Lehrwerke dem Wesen nach enthalten. Gemäß den Absichten, die unser Handbuch verfolgt, handelte es sich für uns nicht bloß um eine Behandlung der darstellenden Geometrie als einer zweckmäßigen Einführung in die technischen Wissenschaften, sondern auch um ein Hervorkehren ihrer selbständigen Bedeutung als einer besonderen Begründungsart der Raumgeometrie. Dadurch, daß sie zu gleicher Zeit hinüberführt zu den technischen Problemen, zeigt sie schöner und deutlicher als irgendein anderer Zweig der Mathematik die enge Verbindung von theoretischer Forschung und praktischer Anwendung. In diesem Lichte soll sie hier erscheinen. Sie soll so dem Techniker Gelegenheit geben, seine wissenschaftliche Auffassung zu vertiefen, und dem Mathematiker, den Weg zu finden von seiner abstrakten Wissenschaft zu den Aufgaben der Praxis.

Braunschweig, im November 1913.

H. E. Timerding.

VORWORT DES VERFASSERS

Die darstellende Geometrie ist aus den Bedürfnissen der Kunst und der Technik erwachsen. Sie ist deshalb immer als angewandte Mathematik aufgefaßt worden und ist es tatsächlich im Hinblick auf den engen Anschluß ihrer Problemstellung an die Bedürfnisse der praktischen Konstruktionen, sie ist aber anderseits nach Form und Methode eine rein mathematische Disziplin. In dieser doppelten Bedeutung dürfte sie eines noch höheren Platzes innerhalb der mathematischen Wissenschaften würdig sein als sie bisher einnimmt. Ohne daß ihr praktischer Wert irgendwie beschränkt würde, könnte sie bei ihrem elementaren Charakter und wahrhaft geometrischen Geist dazu berufen sein, die naturgemäße Einleitung zum Studium der höheren Geometrie zu bilden. In dieser Bedeutung kommt sie namentlich für die Universitäten in Betracht, und da das vorliegende Lehrbuch wesentlich für Studierende der Universitäten, d. h. für künftige Lehrer der Mathematik bestimmt ist, mußte auf die wissenschaftliche Bedeutung der darstellenden Geometrie und die wissenschaftliche Exaktheit ihrer Behandlung besonderer Wert gelegt werden.

Über die Ausführung im einzelnen sollen nur wenige Worte vorausgeschickt werden. Als Grundlage der Konstruktionen im Raume dient die im ersten Kapitel behandelte einfache senkrechte Projektion auf die Zeichenebene. Wenn der Studierende diese kurze Darstellung sorgfältig durchgearbeitet hat, ergibt sich ihm die doppelte Projektion ganz von selbst, und die anderen Methoden, Parallelprojektion und Zentralprojektion, schließen sich, was die metrischen Konstruktionen anbetrifft, eng daran an.

Für die Kurvenlehre haben wir im siebenten und zehnten Kapitel ganz neue Grundlagen gegeben, die allgemeiner, natürlicher und vollständiger sind als die Entwicklungen, die man in den analytischen Darstellungen der Infinitesimalgeometrie gewöhnlich findet. Es ließe sich in dieser Hinsicht noch manches hinzufügen; bei dem beschränkten Raum war es aber nicht möglich.

Die entsprechende allgemeine Behandlung der Grundlagen der Flächentheorie würde einen breiteren Raum beanspruchen und

über den elementaren Charakter unseres Buches hinausführen. Da der Umfang des Bandes ein möglichst bescheidener bleiben sollte, mußten wir darauf verzichten, diese Behandlung zu bringen. Wir haben deshalb die Untersuchungen auf spezielle Flächenklassen beschränkt und haben an mehreren Stellen nur kurze Andeutungen statt vollständiger Beweise geben können.

Die bestimmten praktischen Aufgaben, auf welche die darstellende Geometrie angewendet wird, haben wir überall nur so weit angedeutet, daß der mathematische Charakter dieser Anwendungen deutlich hervortritt Die ausführliche Darstellung der Anwendungen hätte das Hineinziehen vieler technischer Einzelheiten notwendig gemacht und die geometrische Eigenart der Konstruktionen nur verwischt. Damit steht in Zusammenhang, daß die Figuren recht einfach geblieben sind; bei verwickelten Zeichnungen geht die Übersichtlichkeit verloren, die einzelnen Schritte lassen sich nicht mehr deutlich erkennen und in ihrem Zusammenhang verfolgen. Die Figuren sind durchweg als Erläuterungen des Textes und nicht als Zeichenvorlagen aufzufassen. Wer solche Vorlagen wünscht, wird übergenug in den am Schlusse zitierten Sammlungen finden.

Das Buch setzt nur die elementarsten geometrischen Kenntnisse voraus. Die an einzelnen Stellen knapp gehaltene Form wird hoffentlich nur anregend auf den Leser wirken; wir halten es für gut, ihm die Freude der Selbsttätigkeit nicht ganz zu nehmen.

Es bleibt mir noch übrig, meinen besten Dank dem Herausgeber, Herrn Professor Timerding, auszusprechen, der durch Übersetzung und Durchsicht meiner Manuskripte und durch wertvolle Ratschläge mir eine unentbehrliche Hilfe geleistet hat.

Kopenhagen, im August 1913.

J. Hjelmslev.

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

Erstes Kapitel.

Einfache Projektion.

Stereometr. Grundaufgaben . 1
Dreikantskonstruktionen . . . 12
Projektion eines Kreises . . . 15

Zweites Kapitel.

Doppelte Projektion.

Grundaufgaben 18
Einfache Körper 22
Durchdringungen v. Polyedern 27
Raumgeometrische Konstruktionen bei besonderen Lagenverhältnissen 31
Umprojizieren 34
Die Mittelebene. Perspektivische Affinität 36

Drittes Kapitel.

Parallelprojektion. Axonometrie.

Grundsätze der Parallelprojektion 40
Die allgemeine axonometrische Darstellung 42
Kavalierperspektive 48
Orthogonale Axonometrie . . 50

Viertes Kapitel.

Grundlagen und Methoden der perspektivischen Darstellung.

Unendlich ferne Elemente . . 54
Zentralprojektion 57
Das Doppelverhältnis 64

Seite

Perspektive ebene Felder . . 68
Perspektive Raumfiguren . . 75

Fünftes Kapitel.

Elemente der projektiven Geometrie.

Projektive Punktreihen und Strahlenbüschel 80
Punktreihen auf dem Kreis und ihre Anwendung . . 85
Involutionen 89
Pol und Polare. Das Dualitätsprinzip 94
Hilfskonstruktionen 99

Sechstes Kapitel.

Kegelschnitte.

Einleitende Sätze 101
Allgemeine Eigenschaften der Kegelschnitte 108
Die Ellipse 113
Die Parabel 117
Die Hyperbel 120
Perspektive Kegelschnitte . . 123
Schmiegungskreise 129

Siebentes Kapitel.

Ebene Kurven.

Einfache Bögen 135
Die Momentanbewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene 142
Bögen mit monoton variierender Krümmung (Normbögen) 144
Rollkurven 156
Zyklische Kurven 168
Hüllkurven 172
Gegenpunktkurven, Brennkurven, Fußpunktkurven . 174

Seite

Achtes Kapitel.

Umdrehungsflächen.

Allgemeine Erzeugung der Kurven und Flächen . . . 175
Darstellung einer Umdrehungsfläche in Grund- und Aufriß 179
Ebene Schnittkurven einer Umdrehungsfläche 182
Das einschalige Umdrehungshyperboloid 184
Anwendungen des Hyperboloids 189
Umdrehungskegelschnittflächen 193

Neuntes Kapitel.

Kegelschnittflächen.

Die Tangentialebene und ihre Lage zur Fläche. 196
Pol und Polarebene 198
Mittelpunktsflächen 201
Die Paraboloide 204
Geradlinige Kegelschnittflächen 207
Konstruktionen 209
Stereographische Projektion 213
Kreisschnitte 215

Zehntes Kapitel.

Raumkurven.

Einfache Bögen im Raume . 219
Die Parallelprojektion eines einfachen Bogens 221
Die Schmiegungshalbebene . 224
Die Tangentenfläche eines einfachen Bogens 225
Einfache Raumkurven . . . 227
Krümmungskreis. 230

Seite

Elftes Kapitel.

Abwickelbare Flächen und andere Hüllflächen.

Allgemeine abwickelbare Flächen 234
Kegelflächen 239
Schraubenlinien u. abwickelbare Schraubenflächen . . 252
Leitkurven und Leitflächen . 260
Allgemeine Hüllflächen. Kanalflächen. 262

Zwölftes Kapitel.

Windschiefe Flächen.

Erzeugung der windschiefen Flächen. 268
Tangentialebenen 270
Zentralpunkte und Parameter 272
Singuläre Erzeugende . . . 274
Leitflächen 276
Die Striktionslinie 276
Konoide 279
Das Zylindroid 281
Schiefer Durchgang 283
Normalflächen. 286

Dreizehntes Kapitel.

Schraubenflächen und topographische Flächen.

Allgemeine Schraubenflächen 293
Gerade Schraubenflächen . . 295
Schiefe Schraubenflächen . . 297
Topographische Flächen . . 300

Vierzehntes Kapitel.

Die Beleuchtung der Flächen.

Schattenkonstruktionen . . . 305
Beleuchtungslinien 308

Literaturverzeichnis 312
Zusätze 314
Sachregister 315

Erstes Kapitel.

Einfache Projektion.

Stereometrische Grundaufgaben.

1. Ein Punkt A im Raume ist bestimmt, wenn man seine senkrechte Projektion A' auf die Zeichenebene samt der wahren Größe seines Abstandes von dieser Ebene kennt, wobei man indessen den Abstand mit einem bestimmten Vorzeichen zu nehmen hat, das angibt, ob der Punkt vor oder hinter der Zeichenebene liegt. Die Zeichenebene nennen wir auch *Projektionsebene* oder *Bildebene*, und die Projektion des Punktes werden wir gelegentlich auch als sein *Bild* bezeichnen.

Diese Darstellung denken wir uns nun im folgenden auf jeden Punkt des Raumes angewendet, so daß wir annehmen, die Punkte A, B, C ... seien bekannt, wenn ihre Projektionen A', B', C' ... und die zugehörigen Abstände (A), (B), (C) ... gegeben sind, und wenn wir davon sprechen, daß Punkte zu finden sind, die gewissen Bedingungen genügen, so meinen wir stets, daß die Projektionen der Punkte auf die Zeichenebene und die zugehörigen Abstände zu finden sind.

2. Ein Lot der Zeichenebene heißt ein *Projektionsstrahl* oder *Sehstrahl*. Ein solcher wird in den Punkt projiziert, wo er die Zeichenebene schneidet (die *Spur* der Linie), und ist durch diesen Punkt allein bestimmt. Wenn zwei Punkte A und B auf demselben Projektionsstrahl liegen, so sagt man, daß A vor B (und B hinter A) liegt, wenn die Richtung von B nach A nach vorne (d. h. nach der Seite, die vor der Zeichenebene liegt) weist.

Haben zwei Punkte A und B verschiedene Projektionen A' und B', so wird die gerade Linie AB in die Linie $A'B'$ projiziert. Dreht man die projizierende Ebene $ABA'B'$ um $A'B'$ in die Zeichenebene hinein, so fallen A und B in zwei Punkte A_1 und B_1 (Fig. 1), die dadurch bestimmt sind, daß $A'A_1$ und $B'B_1$ senkrecht auf $A'B'$ stehen und daß diese Strecken gleich den Abständen (A) und (B) der gegebenen Punkte werden. A_1B_1

heißt dann die *Umklappung* (oder genauer die *Hauptumklappung*) von AB. Sie kann auf zwei Arten gebildet werden, da man die Drehung nach der einen oder nach der anderen Seite ausführen kann.

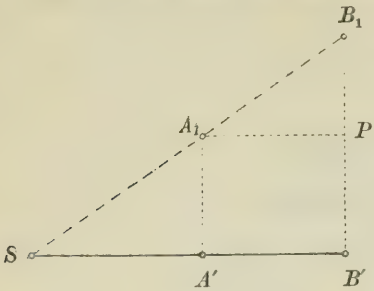


Fig. 1.

Durch diese Umklappung bestimmt man

1. die *Spur* der Linie (ihren Schnittpunkt mit der Zeichenebene) als den Schnittpunkt S von $A'B'$ und A_1B_1,

2. die *Neigung* der Linie gegen die Zeichenebene als den Winkel zwischen $A'B'$ und A_1B_1,

3. die wahre Länge von AB als die Länge von A_1B_1.

Zieht man $A_1P \parallel A'B'$, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck A_1PB_1, dessen Hypotenuse gleich AB ist, während die eine Kathete A_1P gleich $A'B'$ und die andere gleich der Differenz von (A) und (B) wird. Folglich:

Die wahre Länge einer Strecke findet man als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete die Projektion der Strecke und dessen andere Kathete die Differenz der Abstände der Endpunkte von der Zeichenebene ist.

Ist AB der Zeichenebene parallel, so sprechen wir von einer *Frontlinie*. In diesem Falle wird $AB \parallel A'B' \parallel A_1B_1$.

Strecken auf derselben geraden Linie sind ihren Projektionen proportional. Soll die Strecke AB in einem bestimmten Verhältnis geteilt werden, so kann man demnach die Projektion des Teilpunktes finden, indem man $A'B'$ in jenem Verhältnis teilt.

Parallele Linien haben parallele Projektionen, da die projizierenden Ebenen der Linien parallel werden. Wenn die Umklappungen der Linien nach derselben Seite ausgeführt werden, so ergeben sie auch parallele Linien.

3. Eine zur Zeichenebene parallele Ebene heißt eine *Frontebene*. Sie wird durch ihren Abstand von der Zeichenebene (mit dem gehörigen Vorzeichen) vollständig bestimmt. *Figuren in einer Frontebene sind ihren Projektionen kongruent.*

Wenn ein Punkt um einen Projektionsstrahl gedreht wird, so durchläuft er einen Kreis, der selbst in einer Frontebene enthalten ist und dessen Mittelpunkt auf dem Projektionsstrahl liegt. Die Projektion des Kreises kann dann sofort gezeichnet werden. Soll der Punkt um einen gegebenen Winkel gedreht werden, so

stellt dieser in der Projektion sich in der wahren Größe dar und kann deshalb unmittelbar abgetragen werden. So bestimmt man die Projektion des Punktes nach der Drehung; sein Abstand nach der Drehung ist derselbe wie vor der Drehung.

Eine zur Zeichenebene senkrechte Ebene heißt eine *projizierende Ebene* oder *Sehstrahlebene*; sie wird in ihre *Spur*, d. h. ihre Schnittlinie mit der Zeichenebene projiziert und durch diese Spur bestimmt. Die wahre Größe einer Figur in einer projizierenden Ebene findet man durch Umklappung in die Zeichenebene, wie es schon in Fig. 1 angegeben ist.

Jede zu einer projizierenden Ebene senkrechte Linie ist eine Frontlinie und wird als eine zur Spur der projizierenden Ebene senkrechte Linie projiziert.

Hiernach läßt sich die Aufgabe lösen, die wahre Größe der Projektion einer gegebenen Figur auf eine gegebene projizierende Ebene zu bestimmen.

4. Eine *Kugel* ist bestimmt durch ihren Mittelpunkt C und die wahre Länge r ihres Radius. Alle zur Zeichenebene parallelen Radien der Kugel werden in der wahren Größe projiziert, während die anderen Radien bei der Projektion verkürzt werden. Hieraus folgt, daß die ganze Projektion der Kugel in einen Kreis c' mit dem Mittelpunkt C' und dem Radius r fällt; c' ist die Projektion des größten Kreises c der Kugel, der in einer zur Zeichenebene parallelen Ebene liegt, und heißt die *Kontur* oder der *Umriß* der Kugelprojektion (vgl. Fig. 2).

Nimmt man einen Punkt P' innerhalb c' an, so ist dieser die Projektion von zwei Kugelpunkten. Diese Punkte kann man durch Umklappung einer durch P' und C gehenden projizierenden Ebene bestimmen. Man kann auch benützen, daß der Höhenunterschied von P und C sich als Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck gibt, dessen Hypotenuse r ist, während die andere Kathete $P'C'$ ist; man kann dann den Höhenunterschied sofort bestimmen, indem man auf $P'C'$ in P' das Lot errichtet bis zu seinem Schnitt mit c'.

Der Kreis c (und die Frontebene, in der er liegt) teilen die Oberfläche der Kugel in eine *vordere* und eine *hintere Halbkugel*. Man pflegt nun, um der Zeichnung eine größere Anschaulichkeit zu geben, die Kugel als undurchsichtig zu betrachten, so daß jeder Punkt P vorne auf der Kugel die Punkte hinter P verdeckt; und das Resultat hiervon ist, daß der Teil des Raumes, der hinter der vorderen Halbkugel liegt, unsichtbar wird. Wenn deshalb z. B. eine gerade Linie den unsichtbaren Raum durchzieht, so deutet

man dieses in der Zeichnung an, indem man das betreffende Stück von der Projektion der Linie punktiert.

Eine beliebige projizierende Ebene, deren Spur s den Umriß der Kugel schneidet, schneidet die Kugel in einem Kreis. Der Durchmesser dieses Kreises ist gleich der Strecke, die s aus c' ausschneidet, und der Mittelpunkt des Kreises hat denselben Abstand von der Zeichenebene wie der Mittelpunkt der Kugel. Die Umklappung des Kreises kann so leicht gezeichnet werden.

Soll man den Schnittpunkt der Kugel mit einer geraden Linie a finden, so kann dies geschehen, indem man die projizierende Ebene durch die Linie legt und den Kreis bestimmt, in dem sie die Kugel schneidet. Dieser Kreis schneidet die Linie a in den gesuchten Punkten, und diese werden so durch Umklappung der projizierenden Ebene bestimmt (Fig. 2).

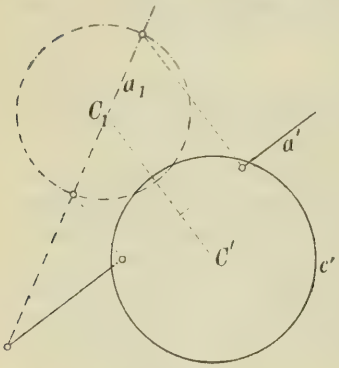


Fig. 2.

5. Aus der Stereometrie ist bekannt, daß ein rechter Winkel, von dem ein Schenkel der Zeichenebene parallel und der andere kein Projektionsstrahl ist, als ein rechter Winkel projiziert wird. Allgemeiner kann man sagen, daß *zwei zueinander senkrechte Linien* (ob sie sich schneiden oder nicht), *wenn die eine der Zeichenebene parallel und die andere kein Projektionsstrahl ist, als zwei zueinander senkrechte Linien projiziert werden.*

Dieser Satz findet unmittelbare Anwendung bei der Lösung folgender Aufgabe: *Gegeben ist ein Projektionsstrahl a und eine schräge Linie b* (durch die Projektion b' und die Umklappung b_1 nach einer bestimmten Seite); *den kürzesten Abstand der beiden Linien zu finden.* Da der gesuchte Abstand zu a senkrecht ist, muß er der Zeichenebene parallel sein; da er zugleich zu b senkrecht ist, muß seine Projektion zufolge des genannten Satzes senkrecht zu b' sein. Die Projektion des Abstandes geht also durch den Punkt a', in dem a auf die Zeichenebene projiziert wird, und ist senkrecht zu b'; so findet man die wahre Größe des Abstandes. Seine Lage im Raum wird mit Hilfe des Fußpunktes auf b bestimmt.

6. Eine schiefe Ebene kann durch ihre Spur s (ihre Schnittlinie mit der Zeichenebene) und einen beliebigen Punkt A in der

Ebene bestimmt werden. Die Frontlinien in der Ebene sind parallel zu s, und dasselbe gilt von ihren Projektionen. Durch jeden Punkt der Ebene geht eine solche Frontlinie. Die Linien in der Ebene, die zu den Frontlinien senkrecht sind, heißen *Querlinien* oder *Falllinien*. Sie werden in Linien, die zu s senkrecht sind, projiziert (nach dem Satze über die Projektion eines rechten Winkels). Durch jeden Punkt der Ebene geht eine Querlinie.

Wir wollen nun zeigen, wie man einen beliebigen Punkt P in der gegebenen Ebene (sA) bestimmen kann (Fig. 3). Wir nehmen die Projektion des Punktes P' beliebig an und wollen den zugehörigen Abstand von der Zeichenebene bestimmen. Durch den gegebenen Punkt A ziehen wir die Querlinie t. Ihre Projektion t' oder $A'S$ geht durch A' und ist zu s senkrecht. Ihre Spur sei S und ihre Hauptumklappung t_n, sie wird mit Hilfe von $A'A_n = (A)$ bestimmt. Durch P ziehen wir nun eine Frontlinie f in der Ebene (f' geht durch P' und ist zu s parallel); f schneidet t in einem Punkte B, dessen Abstand von der Zeichenebene $B'B_n$ ist. Aber diese Länge gibt auch den Abstand des Punktes P von der Zeichenebene an. Der Abstand dieses Punktes von der Spur der Ebene ist derselbe wie der Abstand des Punktes B von dieser Spur, also gleich SB_n. Der Winkel zwischen der gegebenen Ebene und der Zeichenebene ist gleich dem Winkel zwischen t' und t_n.

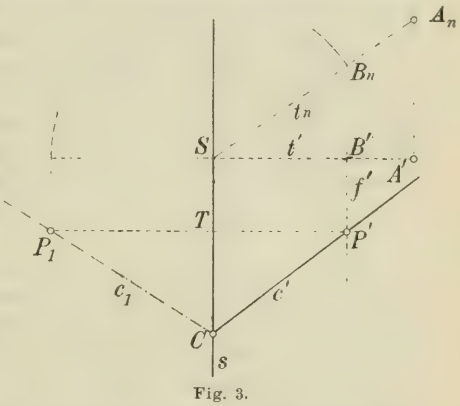


Fig. 3.

Mit Hilfe der umgeklappten Querlinie t_n (des *Profils* der Ebene) bestimmt man sonach

1. die verschiedenen Punkte der Ebene,
2. ihre Abstände von der Spur der Ebene,
3. die Neigung der Ebene gegen die Zeichenebene.

Jede zu s senkrechte Ebene gibt durch Umklappung ein Profil der gegebenen Ebene und heißt deshalb eine *Profilebene* dieser Ebene.

Ist die Projektion einer Figur in der Ebene gegeben und soll man die wahre Gestalt der Figur finden, so kann man dies erreichen, indem man die Ebene um ihre Spur s in die Zeichenebene

hineindreht. Man nennt dies die *Umklappung* der gegebenen Ebene. Diese Umklappung führt man mit Hilfe von Querlinien aus. *Von jedem Punkte zieht man die Querlinie bis zur Spur der Ebene und klappt sie mit Hilfe des Profils um.* In Fig. 3 ist z. B. der Punkt P mit Hilfe der Querlinie PT umgeklappt, die in $P_1 T$ umgeklappt wird, wobei $TP_1 = SB_n$.

Wenn eine Linie in einer Ebene liegt, liegt die Spur der Linie auf der Spur der Ebene. In Fig. 3 ist die Projektion c' einer Linie c in der gegebenen Ebene (sA), die durch P geht, gezeichnet. Der Schnittpunkt C von c' und s ist die Spur der Linie. Soll die Linie durch Drehung der Ebene um s umgeklappt werden, so bleibt C fest, und die Umklappung der Linie ist CP_1.

Zu einem beliebig angenommenen P' gehört ein bestimmtes P_1 und umgekehrt; die Linie $P'P_1$ ist $\perp s$ und wird von dieser Linie in einem konstanten Verhältnis geteilt. Zu einer beliebig gewählten Linie c' gehört eine bestimmte Linie c_1 und umgekehrt, c' und c_1 schneiden s in demselben Punkt (oder sind beide zu s parallel). Parallelen Linien c' und d' entsprechen parallele Linien c_1 und d_1 und umgekehrt.

Diese Eigenschaften kennzeichnen die ganze Verknüpfung zwischen der Projektion und der Umklappung beliebiger Figuren in der gegebenen Ebene und können auf verschiedene Weise beim Übergang von der einen zur anderen Verwendung finden.[1])

7. Ein schiefer Kreiskegel, dessen Grundkreis k in der Zeichenebene liegt und dessen Spitze S gegeben, ist für uns zunächst die unendliche Fläche, welche die durch S gehenden und k schneidenden geraden Linien erfüllen. Die Projektionen dieser Linien gehen von S' aus und schneiden k. Sie erfüllen entweder die ganze Ebene oder nur einen Teil von ihr; im letzten Falle wird die Projektion des Kegels von zwei geraden Linien $S'A$ und $S'B$ begrenzt, welche die *Umrißlinien* der Kegelprojektion heißen, während wir die zu-

1) Beim Konstruieren muß man immer Messungen mit dem Zirkel der Zeichnung von Hilfslinien vorziehen. Man muß sich in dieser Hinsicht merken, daß der Abstand eines Punktes von einer Linie unmittelbar in den Zirkel genommen werden kann, ohne daß man das Lot zeichnet. Dies kann man z. B. benutzen beim Übergang von einem beliebigen Punkte P_1 zu dem zugehörigen Punkte P'. Man zieht zuerst $P_1 T \perp s$ als geometrischen Ort für P'. Hierauf nimmt man das Stück $P_1 T$ in den Zirkel und trägt es auf dem Profil als SB_n ab, worauf man, indem man die eine Spitze des Zirkels in B_n fest läßt, unmittelbar den Abstand des Punktes B_n von s mißt und TP' gleich diesem Abstand abträgt.

gehörigen Seitenlinien des Kegels als die *Umrißseitenlinien* bezeichnen. Sie werden als die Tangenten von S' an k bestimmt.

Soll man einen Punkt auf dem Kegel mit der Projektion P' bestimmen, so geschieht das, indem man die zwei Seitenlinien sucht, deren Projektionen in die Linie $S'P'$ fallen (Fig. 4); die Spuren dieser Seitenlinien fallen in die Punkte Q und R, in denen die Linie $S'P'$ den Kreis k schneidet, die Abstände der gesuchten Punkte von der Zeichenebene werden leicht durch Umklappung bestimmt.

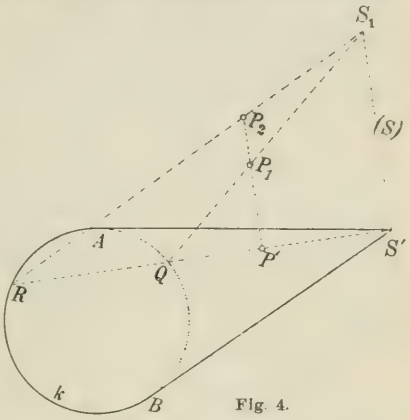


Fig. 4.

Indem man die Kegelfläche als undurchsichtig annimmt und für die Zeichnung ganz dieselben Regeln anwendet, wie sie früher für die Kugel angegeben sind, erkennt man, daß die Strecke SR sichtbar bleibt, während SQ unsichtbar wird. Läßt man R und Q gleichzeitig je einen der Bögen durchlaufen, die auf k durch die Punkte A und B begrenzt werden, so erkennt man, daß die von der Strecke SR beschriebene Fläche sichtbar ist, während die von SQ beschriebene Fläche unsichtbar wird. Wir müssen also den kleineren von den beiden Bögen AB punktieren. Die Oberfläche des Körpers, der von dem unbegrenzten Kegel durch die Zeichenebene abgetrennt wird, wird durch die Linie $SARBS$ in einen sichtbaren und einen unsichtbaren Teil zerlegt. Die Projektion des Körpers wird von der Linie $S'ARBS'$ (dem Umriß) begrenzt.

Ganz ähnliche Betrachtungen gelten für Pyramiden, da man diese als Kegel, deren Grundflächen Polygone sind, ansehen kann. Hierbei muß man alle Kanten der Pyramiden ausziehen oder punktieren, je nachdem sie sichtbar sind oder nicht.

Die Schnittpunkte einer geraden Linie a (Fig. 5), die durch ihre Projektion a' und die Hauptumklappung a_1 gegeben ist, mit dem Kegel $S(k)$, d. h. mit dem Kegel, der die Spitze S und den Grundkreis k hat, findet man, indem man eine Hilfsebene durch S und a legt. Die Spur s dieser Ebene ist parallel zu $S'A'$, wenn A der Punkt von a ist, der von der Zeichenebene denselben Abstand wie S hat. So ergeben sich die Seitenlinien SQ und SR,

in denen die Hilfsebene den Kegel schneidet und auf denen die gesuchten Punkte liegen, wie es in der Figur angegeben ist.

Der Kegel $S(k)$ hat längs jeder Seitenlinie SR eine Tangentialebene, deren Spur die Tangente von k in R ist, die Tangentialebene selbst ist durch die Berührungslinie und die Tangente von k bestimmt. Alle Tangentialebenen gehen durch S. Die beiden Tangentialebenen längs der Umrißseitenlinien sind projizierende Ebenen.

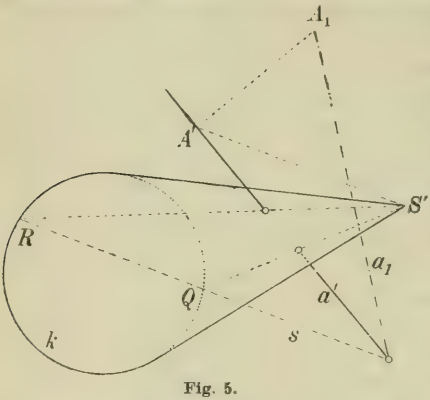


Fig. 5.

Soll man durch einen gegebenen Punkt P eine Tangentialebene an den Kegel legen, so zieht man die Linie SP, ermittelt ihre Spur und legt durch diese Spur eine Tangente s an k. Die gesuchte Tangentialebene ist dann durch die Spur s und den Punkt P (oder S) bestimmt. Die Aufgabe ergibt bis zu zwei Lösungen.

8. Für Zylinder gelten ganz ähnliche Betrachtungen wie für Kegel. Ist die Grundkurve ein Kreis k in der Zeichenebene, und sind die Seitenlinien einer gegebenen Linie a (die kein Projektionsstrahl ist) parallel, so hat die Projektion des Zylinders zwei Umrißlinien, die zu a' parallel sind und k berühren. Längs jeder Seitenlinie hat der Zylinder eine Tangentialebene, die durch die Seitenlinie und die zugehörige Tangente der Grundkurve bestimmt wird. Die Schnittpunkte einer geraden Linie mit dem Zylinder findet man aus einer Hilfsebene durch die Linie, die den Seitenlinien parallel ist. Eine Tangentialebene durch einen gegebenen Punkt wird durch eine Linie, die man durch den Punkt parallel zu den Seitenlinien zieht, bestimmt; die Tangenten, die man von der Spur dieser Linie an k legt, sind die Spuren der gesuchten Tangentialebenen.

9. Soll man durch eine gegebene Linie AB (wobei A in der Zeichenebene und B beliebig angenommen wird) eine Ebene legen, die mit der Zeichenebene einen gegebenen spitzen Winkel bildet, so betrachtet man zuerst alle Ebenen, die durch B gehen und mit der Zeichenebene den gegebenen Winkel bilden. Die Spuren dieser Ebenen haben alle denselben Abstand von B' und müssen deshalb

einen bestimmten Kreis k mit dem Mittelpunkt B' berühren. Man zeichnet diesen Kreis und bestimmt die Spuren der gesuchten Ebenen als die Tangenten an ihn aus A. Alle die genannten Ebenen durch B sind Tangentialebenen eines Rotationskegels mit der Spitze B und dem Grundkreis k. Man kann also die gesuchten Ebenen deuten als die Tangentialebenen durch die Linie AB an diesen Kegel.

10. *Die Schnittlinie zweier Ebenen.* Zwei projizierende Ebenen, deren Spuren nicht parallel sind, schneiden sich in einem Projektionsstrahl. Die Schnittlinie einer schiefen Ebene (sA), die durch ihre Spur s und einen Punkt A gegeben ist, mit einer projizierenden Ebene, deren Spur p ist (Fig. 6), wird eine Linie, deren Projektion p und deren Spur der Schnittpunkt P von s und p ist. (Ist s parallel zu p, so wird die Linie eine Frontlinie.) Einen anderen Punkt B der gesuchten Linie erhält man, indem man eine Frontlinie durch A in der Ebene (sA) zieht und ihren Schnittpunkt B mit der projizierenden Ebene bestimmt. Die Umklappung der gesuchten Linie ist PB_1 (wobei $B'B_1 = (A)$ und $\perp p$).

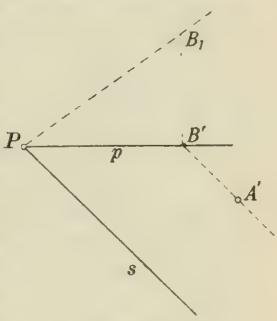


Fig. 6.

Ist eine schiefe Ebene durch ihre Spur s und den Neigungswinkel α gegen die Zeichenebene (nach einer bestimmten Seite hin) gegeben und man sucht ihre Schnittlinie mit einer projizierenden Ebene, deren Spur p ist, so führt man dies am besten aus, wie in Fig. 7 angegeben. Man zeichnet eine Querlinie SA in der Ebene, wobei A so angenommen wird, daß seine Projektion A' auf p fällt, und $A'S \perp s$. Der Abstand des Punktes A von der Zeichenebene wird durch das rechtwinklige Dreieck $BA'A_1 \simeq SA'A$ bestimmt, wo $A'B = A'S$ auf p abgetragen ist und der Winkel $A'BA_1$ gleich dem gegebenen Winkel α ist. PA_1 ist die Umklappung der gesuchten Linie. Bei der Ausführung der Konstruktion ist es unnötig, die Linie $A'S$ zu zeichnen, indem man durch den Zirkel unmittelbar den Abstand des Punktes A' von s bestimmen und auf p abtragen kann.

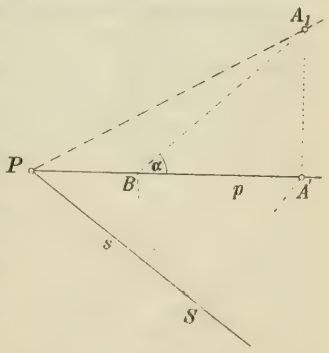


Fig. 7.

Die Schnittlinie einer schiefen Ebene mit einer Frontebene ist eine Frontlinie, die man mit Hilfe des Profils der schiefen Ebene leicht bestimmen kann.

Von der Schnittlinie zweier schiefen Ebenen, deren Spuren a und b nicht parallel sind, liegt die Spur C im Schnittpunkt von a und b. Um einen neuen Punkt der Schnittlinie zu finden, zeichnet man zuerst die Profile p und q der beiden Ebenen, wie in Fig. 8 angegeben, und schneidet darauf beide Ebenen mit einer Frontebene, die von der Zeichenebene einen passend gewählten Abstand h hat. Die beiden Schnittlinien m und n mit dieser Frontebene schneiden einander in dem Punkte P, dessen Projektion P' und dessen Abstand von der Zeichenebene h ist.

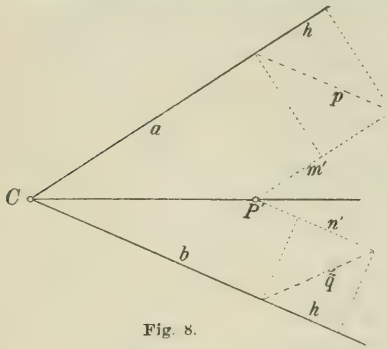


Fig. 8.

Die Schnittlinie zweier schiefen Ebenen mit parallelen Spuren wird eine Frontlinie, die sich mit Hilfe einer gemeinsamen Profilebene der beiden Ebenen bestimmen läßt.

11. *Der Schnittpunkt einer geraden Linie mit einer Ebene* wird gefunden, indem man die Schnittlinie der Ebene mit einer Hilfsebene durch die gegebene Linie bestimmt; diese Schnittlinie trifft dann die gegebene Linie in dem gesuchten Punkt. Als Hilfsebene wählt man gewöhnlich eine projizierende Ebene oder eine Ebene, deren Spur der Spur der gegebenen Ebene parallel ist.

12. Wenn eine Linie auf einer Ebene senkrecht ist, so ist sie senkreckt auf allen Linien in der Ebene, also auch auf den Frontlinien der Ebene. Ihre Projektion muß deshalb auf den Projektionen der Frontlinien, insbesondere auch auf der Spur der Ebene senkrecht sein. Folglich:

Wenn eine Linie auf einer Ebene senkrecht ist, ist ihre Projektion auf der Spur der Ebene senkrecht.

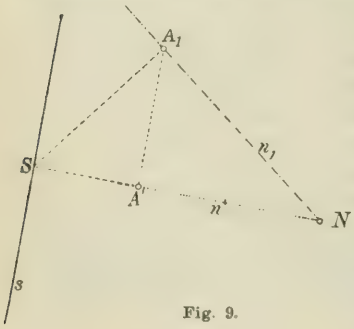


Fig. 9.

Hat man (Fig. 9) eine Ebene (sA) mit der Spur s, die durch den Punkt A geht, und man soll das Lot n der Ebene in A bestimmen

so kann man sofort die Projektion des Lotes n' oder $A'S \perp s$ zeichnen. Die projizierende Ebene durch n' schneidet die gegebene Ebene in SA und die gesuchte Linie muß in dieser projizierenden Ebene liegen und auf SA in A senkrecht stehen. Klappt man die projizierende Ebene um, so daß SA auf SA_1 fällt, so wird die Umklappung n_1 des gesuchten Lotes $\perp SA_1$ in A_1. Dadurch ist das Lot vollständig bestimmt. Seine Spur N ist der Schnittpunkt von n' und n_1.

Der Abstand eines Punktes von einer Ebene kann gefunden werden, indem man eine Profilebene durch den Punkt umklappt.

Fig. 9 zeigt auch, wie man durch einen gegebenen Punkt A der Linie NA eine Ebene senkrecht zu der Linie legen kann: die Umklappung NA_1 der Linie wird gezeichnet und in der projizierenden Ebene der gegebenen Linie $AS \perp AN$ bestimmt, worauf die Spur s der Ebene leicht gefunden werden kann.

13. *Die Tangentialebenen einer Kugel, die durch eine gegebene Linie a gehen*, werden durch folgende Betrachtung bestimmt: die Radien nach den Berührungspunkten der gesuchten Ebenen müssen auf den Tangentialebenen, also auch auf a senkrecht sein, sie müssen deshalb in einer durch den Mittelpunkt O der Kugel senkrecht zu a gelegten Ebene enthalten sein. Man bestimmt daher zunächst diese Ebene, sucht ihren Schnittpunkt mit a und legt von diesem Punkte aus die Tangenten an den größten Kreis, in dem die Ebene die Kugel schneidet. Dies wird durch Umklappung ausgeführt. Jede dieser Tangenten bestimmt dann zusammen mit a eine Tangentialebene der Kugel.

14. *Der Winkel zwischen zwei Ebenen* (Fig. 10). Die Ebenen mögen die Spuren a und b und ihre Schnittlinie c die Projektion c' und die Hauptumklappung c_1 haben. Man wählt einen Punkt C auf c (C' und C_1 seien Projektion und Umklappung dieses Punktes) und legt durch ihn eine Ebene senkrecht zu c. Diese Hilfsebene schneidet die gegebenen Ebenen in zwei Linien und der gesuchte Winkel wird durch den Winkel zwischen diesen Linien dargestellt.

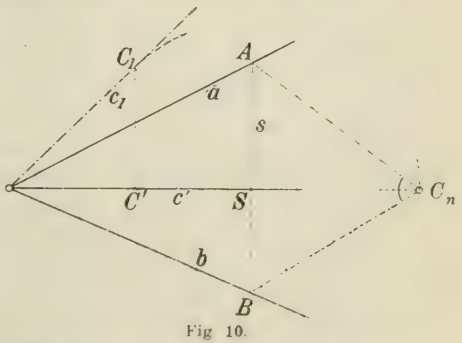


Fig. 10.

Die Spur s der Hilfsebene ist nach der in 12 angegebenen

Methode zu finden. Schneidet s die Linien a und b in A und B, so sind AC und BC die Schnittlinien der Hilfsebene mit den gegebenen Ebenen. Die wahre Größe des Winkels ACB wird durch Umklappung um s gleich AC_nB ($C_nS = C_1S$) gefunden. Bei der Ausführung kann man die Linien $C'C_1$ und SC_1 auslassen; man zieht $AB \perp c'$ und trägt dann sofort $SC_n = Sc_1$ ab.

Zuweilen benutzt man auch den Umstand, daß der Winkel zwischen zwei Ebenen gleich dem Winkel zwischen ihren Normalen ist.

Will man sich versichern, daß eine Ebene auf einer anderen senkrecht ist, so muß man darauf achten, daß sie ein Lot dieser Ebene enthält.

Aus Fig. 10 erkennt man gleichzeitig, wie man in einem Dreikant, von dem zwei Kanten a und b in der Zeichenebene liegen, den Flächenwinkel an der dritten Kante c finden kann. Wie man die Flächenwinkel an a und b findet, ist aus dem Vorhergehenden (6) bekannt. Die wahre Größe der Seitenwinkel (ac) und (bc) findet man durch Umklappung um a und b (6).

Dreikantskonstruktionen.

15. *Bestimmung des Dreikants durch seine Seiten.* Die eine Seite (ab) wird in die Zeichenebene gelegt. Von a und b aus werden die Winkel (am) und (bn) nach außen hin gleich den anderen beiden Seiten (ac) und (bc) angetragen. Die so entstehende Figur heißt die Abwickelung des Dreikants (Fig. 11). Es handelt sich nun darum, m und n um a und b zu drehen, bis sie in der dritten Kante c zusammenstoßen. Um dies auszuführen, wählen wir auf m und n zwei Punkte M und N im gleichen Abstande von dem Scheitel des Dreikants S. Diese Punkte stoßen bei der Drehung in einem Punkte C der dritten Kante zusammen und es handelt sich bloß darum, diesen Punkt zu finden. Die Kreise, die M und N bei den angegebenen Drehungen beschreiben, projizieren sich nun auf die Zeichenebene in die geraden Linien $MA \perp a$ und $NB \perp b$,

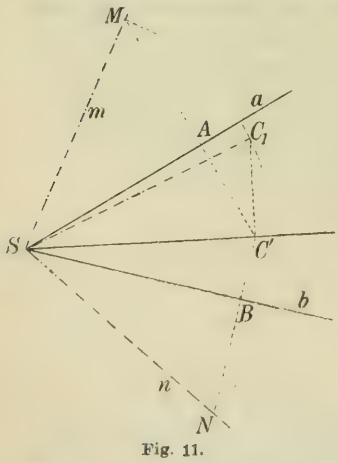


Fig. 11.

und der Schnittpunkt dieser Linien, C', muß deshalb die Projektion des gesuchten Punktes C sein. Der Abstand des Punktes C von der Zeichenebene ergibt sich als Kathete in dem rechtwinkligen Dreieck $SC'C_1$, in dem die andere Kathete SC' bekannt und die Hypotenuse $SC_1 = SM = SN$ ist. In der Figur ist dies so ausgeführt worden, daß man gleichzeitig die Hauptumklappung SC_1 von SC erhält. Die Aufgabe hat zwei Lösungen, die zwei bezüglich der Zeichenebene symmetrisch liegende Figuren ergeben.

Wie man hierauf die Flächenwinkel des Dreikants finden kann, ist in 14 angegeben. Eine direkte Bestimmung des Flächenwinkels an c mit Hilfe der Abwickelung des Dreikants zeigt Fig. 12. Die Bezeichnung ist wie in Fig. 11. Eine zu c in C senkrechte Ebene schneidet die beiden Seitenflächen ac und bc in Linien, die bei der Abwickelung sich als zwei zu m und n senkrechte Linien MP und NQ darstellen; man hat damit die wahre Größe aller Seiten in dem Dreieck PCQ gefunden und kann dann leicht die Umklappung des Dreiecks zeichnen. Der gesuchte Flächenwinkel wird durch den Winkel PRQ dargestellt.

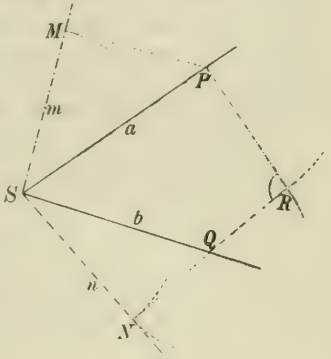


Fig. 12.

16. Ist ein Dreikant durch eine Seite und die anliegenden Winkel bestimmt, so legt man die gegebene Seite (ab) in die Zeichenebene (Fig. 8), worauf die gegebenen Flächenwinkel sofort die Profile p und q für die Seitenebenen ac und bc bestimmen. Man findet darauf die Schnittlinie dieser Ebenen.

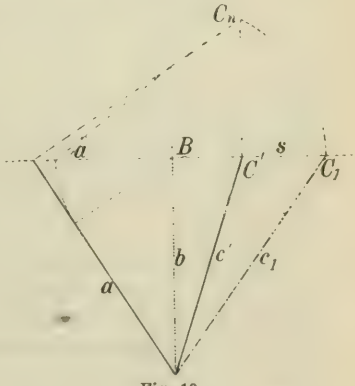


Fig. 13.

17. *Konstruktion des Dreikants aus einem Winkel a, einer anliegenden Seite* (ab) *und der gegenüberliegenden Seite* (bc). Man legt die Seite (ab) in die Zeichenebene (Fig. 13). Die Seite (bc) denkt man sich um b auf die Zeichenebene in die Lage (bc_1) umgeklappt und zeichnet sie so auf.

Von der Kante c weiß man, daß sie auf dem Kegelmantel, der von c_1 bei der Drehung um b beschrieben wird, liegen muß, und zugleich, daß sie in einer bestimmten Ebene ac enthalten sein muß, welche die Spur a hat und den gegegebenen Winkel a mit der Zeichenebene bildet. Die Kante c entsteht also als Schnittlinie des Kegelmantels mit dieser Ebene. Eine projizierende Ebene mit der Spur $s \perp b$ schneidet nun den Kegelmantel in einem Kreis und die Ebene ac in einer geraden Linie; die gesuchte Kante c muß durch einen der Schnittpunkte dieses Kreises und dieser Linie hindurchgehen. Um diese Schnittpunkte zu finden, klappt man die projizierende Ebene um, worauf man den Kreis sofort zeichnen kann (sein Mittelpunkt sei B, sein Radius BC_1) die Schnittlinie mit der Seitenebene (ac) wird dann bestimmt, wie früher angegeben (Fig. 7).

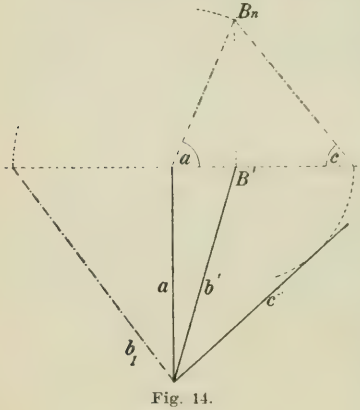


Fig. 14.

18. *Konstruktion des Dreikants aus einer Seite* (ab), *einem anliegenden Winkel* a *und dem gegenüberliegenden Winkel* c. Es ist am bequemsten, die beiden gegebenen Flächenwinkel an die Zeichenebene stoßen zu lassen. Deshalb denken wir uns die Seitenfläche ac in der Zeichenebene. Zunächst tragen wir den Winkel $(ab_1) = (ab)$ in der Zeichenebene ab (Fig. 14) und drehen ihn hierauf um a in eine Ebene, die den gegebenen Winkel a mit der Zeichenebene bildet. Dies läßt sich mit Hilfe eines Profils ausführen. Die Linie b habe die Projektion b' und der Punkt B auf b den Abstand $B'B_n$ von der Zeichenebene. Es handelt sich dann bloß darum, durch b eine Ebene zu legen, die einen gegebenen Winkel c mit der Zeichenebene bildet. (Vgl. hierfür 9).

19. *Konstruktion des Dreikants aus den drei Flächenwinkeln.* Man zieht von einem Punkte A aus zwei Halbstrahlen p und q, die den Winkel a miteinander bilden, und denkt sich das gesuchte Dreikant so gelegt, daß die Seitenebenen ab und ac projizierende Ebenen mit den Spuren p und q werden. Es handelt sich nun darum, eine dritte Ebene zu finden, welche die gegebenen Winkel b und c mit diesen projizierenden Ebenen bildet. Von A lassen wir noch die Halbstrahlen p_1 und q_1 ausgehen, den ersten $\perp p$

und nach derselben Seite von p aus wie q, den zweiten $\perp q$ und nach derselben Seite von q aus wie p. Diese Halbstrahlen sind zu den projizierenden Ebenen senkrecht. Das in A auf der gesuchten Ebene errichtete Lot n kann man nun daraus finden, daß es die gegebenen Winkel b und c mit p_1 und q_1 bilden muß. Die Konstruktion wird ausgeführt, wie in 15 angegeben. Ist n gefunden, so legt man eine beliebige Ebene $\perp n$ und benutzt sie als die dritte Seitenfläche des Dreikants. Dessen Seiten können dann durch Umklappung gefunden werden.

Projektion eines Kreises.

20. Durch senkrechte Projektion eines Kreises entsteht eine Kurve, die man als *Ellipse* bezeichnet. In Fig. 15 ist eine Ebene mit der Spur s und dem Profil p angenommen, die mit der Zeichenebene den Winkel α bildet. In der Ebene ist ein Punkt O gegeben. Soll man nun die Projektion eines Kreises in der Ebene mit dem Mittelpunkt O und gegebenem Radius zeichnen, so benutzt man, daß die Frontlinien der Ebene in ihrer wahren Größe projiziert werden, während die Querlinien im Verhältnis $\cos\alpha : 1$ verkürzt erscheinen. Wir ziehen eine Frontlinie x und eine Querlinie y durch O. Der Durchmesser des Kreises, der auf x fällt, wird in der wahren Größe $A'A_1'$ projiziert, während der Durchmesser auf y mit $\cos\alpha$ multipliziert erscheint. Die Strecke $O'B'$ findet man also, indem man den Kreisradius $OA = O'A'$ mit $\cos\alpha$ multipliziert. Dies läßt sich mit Hilfe des Profils leicht wie folgt ausführen: Man nimmt das Stück $O'A'$ in den Zirkel und trägt es als SP auf dem Profil ab, darauf mißt man sofort den Abstand des Punktes P von s (ohne diesen Abstand zu zeichnen) und bringt nun das gefundene Stück in den Lagen $O'B'$ und $O'B_1'$ an. Auf ganz ähnliche Weise lassen sich die übrigen Punkte der Ellipse finden, indem man den Kreis über $A'A_1'$ als Durchmesser zeichnet, die Ordinate $N'M_1'$ errichtet und sie mit $\cos\alpha$ multipliziert, wodurch jedesmal ein Punkt M' der Ellipse bestimmt wird. Die Tangente der Ellipse in M' schneidet x' in demselben Punkt wie die Tangente des Kreises

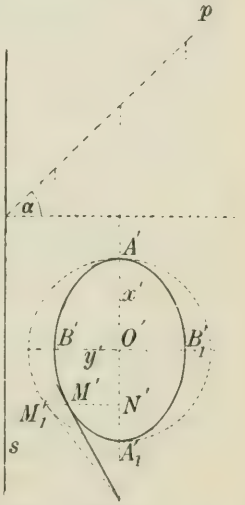


Fig. 15.

in M_1'. Die Tangenten in B' und B_1' sind zu x' und die Tangenten in A' und A_1' sind zu y' parallel. x' und y' sind Symmetrieachsen der Ellipse. Die Strecken $A'A_1'$ und $B'B_1'$ heißen die *große* und die *kleine Achse*, $O'A'$ und $O'B'$ die *große* und die *kleine Halbachse*. O' heißt der *Mittelpunkt* der Ellipse und die Linien durch O' ihre *Durchmesser*. Die Endpunkte der Achsen heißen *Scheitel*.

21. In der Fig. 16 ist eine geometrische Konstruktion der Ellipse mit den Halbachsen OA und OB angegeben. Es sind die beiden Kreise über den Achsen als Durchmesser geschlagen, der Halbmesser ORS gezogen und der Schnittpunkt P der Linien durch $R \parallel OA$ und $S \parallel OB$ bestimmt. P ist dabei ein Punkt der Ellipse, da $\frac{NP}{NS} = \frac{OB}{OA}$ wird. Die Tangente in P schneidet OA in demselben Punkt wie die Tangente an den großen Kreis in S. Aus der Figur geht auch hervor, daß das Verhältnis $\frac{MR}{MP} = \frac{OB}{OA}$ wird und somit konstant ist; hieraus schließt man, daß, wenn man die Ellipse um OB in eine Ebene dreht, die den Winkel α $\left(\cos\alpha = \frac{OB}{OA}\right)$ mit der Zeichenebene bildet, die Ellipse auf die Zeichenebene in einen Kreis über der kleinen Achse als Durchmesser projiziert wird. Die Ellipse ist dann in der neuen Lage der schräge Schnitt eines Rotationszylinders, dessen Normalschnitt der angeführte Kreis ist. Hieraus schließt man leicht:

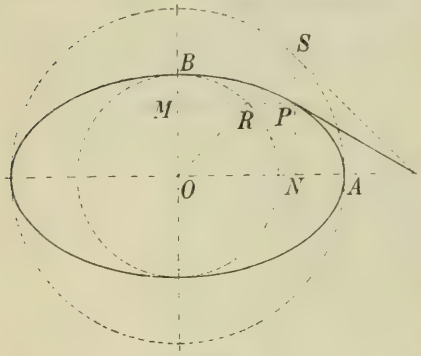


Fig. 16.

Durch jede Ellipse kann man zwei Rotationszylinder legen. Deren Achsen gehen durch den Mittelpunkt der Ellipse, liegen in einer Ebene, die durch die große Achse senkrecht zu der Ebene der Ellipse gelegt wird, und bilden einen Winkel mit der großen Achse, dessen Sinus gleich dem Verhältnis der Achsen ist.

22. Wir wollen nun noch die Ellipse als ebenen Schnitt eines Rotationszylinders untersuchen. Zwei gleich große Kreise in der Zeichenebene (Fig. 17) mögen die Mittelpunkte O und O_1 und die gemeinsamen Tangenten PP_1 und QQ_1, die der Zentralen

parallel sind, besitzen. Man beweist leicht, daß alle Punkte der Ebene, für welche die Summe der Längen der Tangenten an die beiden Kreise gleich PP_1 wird, die beiden Strecken PP_1 und QQ_1 erfüllen müssen. Bei der Drehung um OO_1 beschreiben die Kreise zwei Kugeln, während PP_1 und QQ_1 ein Stück eines Rotationszylinders beschreiben. Dieses Stück wird im Raume der geometrische Ort für die Punkte, für welche die Tangentenlängen an die zwei Kugeln die Summe PP_1 haben. Eine innere gemeinsame Berührungsebene, welche die Kugeln in F und F_1 berührt, schneidet also den Rotationszylinder in einer Kurve, die in ihrer Ebene der geometrische Ort aller Punkte ist, für welche die Summe der Abstände von F und F_1 gleich PP_1 wird. Aus der Figur erkennt man sofort, daß $PP_1 = AF + AF_1 = AF + FA_1 = AA_1$ wird. Hieraus leitet man folgenden Satz her:

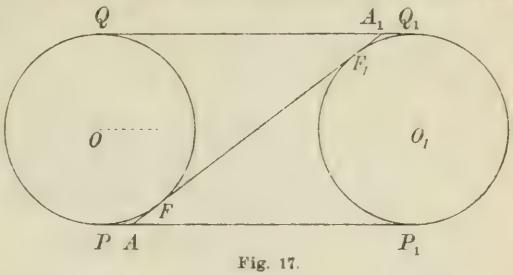


Fig. 17.

Für jede Ellipse finden sich auf der großen Achse zwei feste Punkte F und F_1, deren Abstände von einem beliebigen Punkt der Ellipse eine konstante Summe ergeben, die gleich der großen Achse der Ellipse ist. Diese beiden Punkte heißen die *Brennpunkte* der Ellipse und ihre Abstände von den Punkten der Ellipse heißen *Brennstrahlen.*

Sind die Achsen der Ellipse gegeben, so findet man die Brennpunkte daraus, daß die Brennstrahlen von den Endpunkten der kleinen Achse gleich der großen Halbachse werden müssen.

Man zeigt leicht, daß zu zwei beliebig gewählten Brennpunkten F und F_1 und einer beliebigen Länge der großen Achse ($> FF_1$) eine bestimmte Ellipse gehört.

Zweites Kapitel.

Doppelte Projektion.

Grundaufgaben.

23. Wenn eine Figur $ABC\ldots$ durch ihre Projektion $A'B'C'\ldots$ auf die Zeichenebene zusammen mit den Abständen der verschiedenen Punkte von dieser Ebene dargestellt wird, ist es oft bequem, zur Angabe der genannten Abstände die gegebene Figur auf eine feste projizierende Ebene mit der Spur x (Fig. 18) zu projizieren und diese Projektion in die Zeichenebene (nach einer bestimmten Seite) umzuklappen. Die umgeklappte Projektion $A''B''C''\ldots$ liegt dann so, daß die Verbindungslinien $A'A''$, $B'B''$, $C'C''\ldots$ zu x senkrecht sind, während die Abstände der Punkte A'', B'', $C''\ldots$ von x die Abstände der Punkte A, B, $C\ldots$ von der Zeichenebene angeben. Die Zeichenebene wird als die *Grundrißebene (erste Projektionsebene)*, $A'B'C'$ als die *Grundrißprojektion*, hingegen die projizierende Ebene durch x als die *Aufrißebene (zweite Projektionsebene)*, $A''B''C''\ldots$ als die *Aufrißprojektion* der gegebenen Figur bezeichnet. Die erste Projektion ist dabei die Projektion der Figur auf die Zeichenebene, die zweite Projektion dient nur zur Angabe der Abstände der verschiedenen Punkte von dieser Ebene (auch hinsichtlich des Vorzeichens).

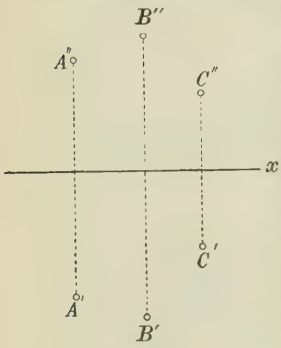


Fig. 18.

Diese beiden Projektionen geben nun Anlaß zu folgender Betrachtung: Die Figur $ABC\ldots$ im Raume kann man sich auch durch ihre Projektion auf die zweite Projektionsebene und die Abstände der Punkte A, B, $C\ldots$ von dieser Ebene bestimmt denken; diese Abstände sind gleich den Abständen der Punkte A', B', C', $\ldots$ von x. Wenn man nun die zweite Projektionsebene um x umklappt, dreht man sie um einen rechten Winkel und

läßt die Figur $ABC \ldots$ an dieser Drehung teilnehmen; derart kommt sie in eine solche Lage, daß ihre Projektion auf die Zeichenebene $A''B''C'' \ldots$ wird, während ihre Punkte die Abstände xA', xB', $xC' \ldots$ (mit dem gehörigen Vorzeichen) von der Zeichenebene haben. Die Figur ABC kann also auf doppelte Weise (in zwei verschiedenen Lagen) mit Hilfe der zwei Projektionen $A'B'C' \ldots$ und $A''B''C'' \ldots$ dargestellt werden, indem man, wie man sagt, zwei verschiedene Orientierungen benutzt:

1. Bei der *ersten Orientierung* geht man aus von $A', B', C' \ldots$ als Projektionen auf die Zeichenebene und denkt sich von diesen Punkten aus in der Richtung senkrecht zur Zeichenebene die Abstände xA'', xB'', $xC'', \ldots$ (mit Rücksicht auf das Vorzeichen) abgetragen, wodurch man zu den Punkten der dargestellten Figur gelangt.

2. Bei der *zweiten Orientierung* betrachtet man $A'', B'', C'', \ldots$ als Projektionen auf die Zeichenebene und denkt sich von diesen Punkten aus in der Richtung senkrecht zur Zeichenebene die Abstände xA', xB', $xC', \ldots$ (mit Rücksicht auf das Vorzeichen) abgetragen. Die Figur, welche die so gewonnenen Raumpunkte bilden, hat eine andere Lage wie die ursprünglich gegebene Figur $ABC \ldots$, aus der sie durch eine Drehung um x durch 90^0 hervorgeht. Aber da es im allgemeinen gar nicht auf die Lage der Figur im Raume, sondern nur auf ihre Gestalt ankommt, ist es klar, daß man diese Orientierung ebensogut wie die erste benutzen kann.

Die hier angegebene doppelte Darstellung einer Figur nennt man eine *doppelte Projektion.* Die erste Projektion heißt auch oft die *horizontale,* die zweite die *vertikale Projektion,* indem man sich den Grundriß horizontal und den Aufriß vertikal angenommen denkt. Dadurch wird die Ausdrucksweise häufig vereinfacht.

Die Achse x trennt die Zeichenebene in einen *vorderen* und einen *hinteren* Teil, und die Umklappung der zweiten Projektionsebene denkt man sich gewöhnlich so ausgeführt, daß der Teil der Ebene, der über der Zeichenebene liegt, hinter x fällt. Die Punkte, die über der ersten und vor der zweiten Projektionsebene liegen, bezeichnet man als die Punkte des *ersten Quadranten;* von jedem solchen Punkt liegt die Grundrißprojektion *vor* und die Aufrißprojektion *hinter* der *Grundachse (trennenden Achse)* x. Man gibt soweit wie möglich der darzustellenden Figur eine solche Lage, daß sie im ersten Quadranten liegt. Bei der Ausführung einzelner Konstruktionen kann man indessen auch Punkte der anderen drei Quadranten, die durch die beiden Projektionsebenen begrenzt

werden, benutzen: der *zweite* Quadrant liegt *über* der Grundrißebene und *hinter* der Aufrißebene, der *dritte* Quadrant *unter* der Grundrißebene und *hinter* der Aufrißebene, der *vierte* Quadrant *unter* der Grundrißebene und *vor* der Aufrißebene. Von jedem Punkt der *Grundrißebene* liegt die *zweite* Projektion auf der Grundachse, und von jedem Punkt der *Aufrißebene* liegt die *erste* Projektion auf der Grundachse.

Bei der Ausführung der einzelnen Konstruktionen läßt sich das im vorigen Kapitel Gebrachte voll verwerten.

24. *Die gerade Linie.* Ein Projektionsstrahl der ersten Projektion wird im Grundriß als ein Punkt, im Aufriß als eine zur Grundachse x senkrechte Linie dargestellt. Das Umgekehrte gilt für einen Projektionsstrahl der zweiten Projektion. Die Drehung um einen Projektionsstrahl läßt sich sofort ausführen, da sie in der einen Projektion in wahrer Größe erscheint.

Wenn eine Linie für keine der beiden Projektionen ein Projektionsstrahl ist, so werden ihre beiden Projektionen gerade Linien. In der Fig. 19 ist eine Linie a mit den Projektionen a' und a'' dargestellt. Von einem Punkt A der Linie liegt die erste Projektion A' auf a' und die zweite Projektion A'' auf a'' derart, daß $A'A'' \perp x$. Die Spur A_1 der Linie in der ersten Projektionsebene (die *Grundrißspur*) ist dadurch bestimmt, daß A_1'' auf der Grundachse x liegen muß, während die Aufrißspur A_2 dadurch bestimmt wird, daß A_2' auf x liegt. Die Winkel α und β, welche die Linie mit den beiden Projektionsebenen bildet, werden durch die Umklappungen a_1 und a_2 bestimmt, indem man einmal die erste, das anderemal die zweite Orientierung benutzt. Der Teil der Linie, der in der Figur gezeichnet ist, liegt im ersten Quadranten. Nur dieser Teil der Linie wird in den beiden Projektionen ausgezogen; braucht man andere Teile der Linie, so müssen ihre Projektionen punktiert werden.

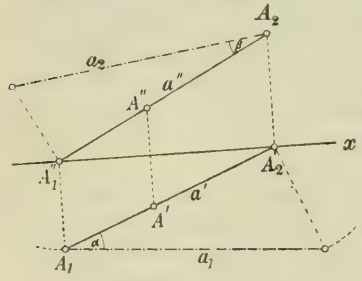


Fig. 19.

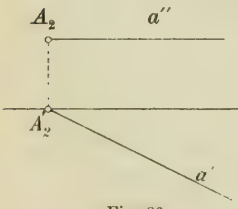


Fig. 20.

Ist eine Linie zur Grundrißebene (Fig. 20) parallel, nennen wir sie eine *Grundlinie* oder *Horizontale*; ist sie zur Aufrißebene parallel, bezeichnen wir sie als eine *Front-*

linie. Ist die Linie zur Grundachse parallel, so werden ihre beiden Projektionen der Grundachse parallel.

25. *Die Ebene.* Eine Ebene Π wird im allgemeinen in doppelter Projektion durch ihre Spuren in den Projektionsebenen, p_1 und p_2, ihre *Grundriß-* und ihre *Aufrißspur*, dargestellt. Wenn die Ebene die Grundachse schneidet, müssen ihre beiden Spuren durch den Schnittpunkt gehen. Ist die Ebene zur Grundachse parallel, sind zu dieser auch beide Spuren parallel. Wenn die Ebene die Achse x selbst enthält, fallen beide Spuren in x und die Ebene muß dann auf andere Weise dargestellt werden, z. B. durch ihre Spur x und einen beliebigen Punkt, der in ihr liegt. Ist eine Ebene zur Grundrißebene parallel, nennen wir sie eine *Grundebene* oder *Horizontalebene*; ist sie zur Aufrißebene parallel, bezeichnen wir sie als eine *Frontebene*.

In der Fig. 21 ist eine Ebene mit den Spuren p_1 und p_2 dargestellt. Wir benutzen die erste Orientierung und denken uns die Ebene gegeben durch ihre Grundrißspur p_1 und einen Punkt A, der auf p_2 angenommen ist. Wir haben dann die frühere Darstellung in einer Projektion (6). Die Querlinie AS_1 bestimmt ein Profil S_1A_n, das, ganz wie in 6 angegeben, zur Bestimmung der verschiedenen Punkte in der Ebene und zur Umklappung der Ebene in die erste Bildebene benutzt wird. Der Winkel, den die Ebene mit der Grundrißebene bildet, ist $A'S_1A_n$.

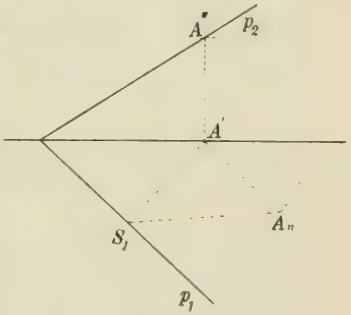


Fig. 21.

Wenn eine Ebene eine projizierende Ebene für die Grundrißprojektion ist, wird $p_2 \perp x$ und p_1 liefert sofort ein Profil der Ebene.

Die *Schnittlinie zweier Ebenen* wird gewöhnlich dadurch bestimmt, daß ihre Spuren als die Schnittpunkte der entsprechenden Spuren der Ebenen entstehen. Ist das eine Paar von Spuren parallel, so wird die Schnittlinie, wenn sie existiert, diesen Spuren, also auch der sie enthaltenden Projektionsebene parallel. Ist auch das andere Paar von Spuren parallel, und sind die Spuren nicht zu x parallel, so sind die Ebenen selbst parallel.

Weitere Methoden sind schon früher in 10 angegeben worden.

Eine Linie a (Fig. 22), die in einer gegebenen Ebene (p_1p_2) liegt und eine gegebene Grundrißprojektion a' hat, bestimmt sich als Schnittlinie der Ebene mit der vertikalen Ebene durch a'.

Besonderes Interesse haben die Grundlinien und Frontlinien in der Ebene. In der Fig. 23 ist eine Grundlinie a und eine Frontlinie b gezeichnet.

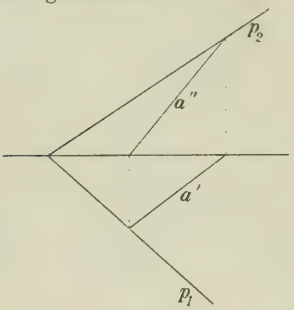


Fig. 22.

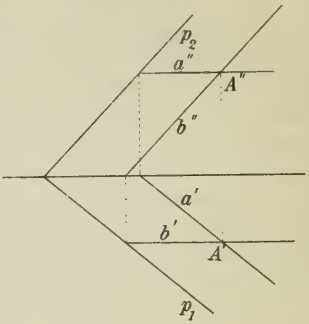


Fig. 23.

Kennt man die eine Projektion A' eines Punktes A der Ebene, so kann man die andere Projektion A'' finden, indem man eine Linie (z. B. eine Grundlinie) in der Ebene durch den betreffenden Punkt zieht (Fig. 23).

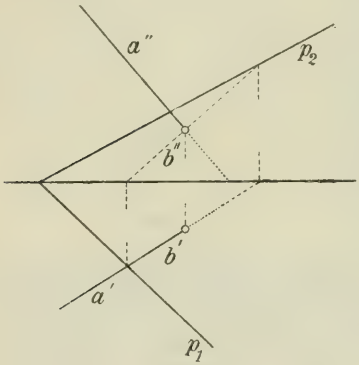


Fig. 24.

Der *Schnittpunkt einer Linie a mit einer Ebene* $(p_1 p_2)$ wird gewöhnlich gefunden, indem man eine projizierende Ebene (in der Fig. 24 eine vertikale Ebene) durch a legt und die Schnittlinie b dieser Ebene mit der gegebenen Ebene bestimmt. b schneidet dann a in dem gesuchten Punkte.

Ist eine Linie zu einer Ebene senkrecht, so sind die Projektionen der Linie zu den zugehörigen Spuren der Ebene senkrecht (12).

Einfache Körper.

26. Bei der Darstellung von Körpern in doppelter Projektion muß die Zeichnung in jeder Projektion nach den früher angegebenen Regeln ausgeführt werden.

In der Fig. 25 ist ein Tetraeder $ABCD$ dargestellt. In der Aufrißprojektion ist der Umriß $A''B''C''D''$; dieser wird voll aus-

gezogen. Hierauf sieht man nach, welche der beiden Kanten AC und BD sichtbar ist, indem man die beiden Punkte dieser Kanten, deren Aufrißprojektionen zusammenfallen, im Grundriß betrachtet. So erkennt man, daß in der Figur die Kante BD vor der Kante AC durchgeht. $B''D''$ ist also auszuziehen, $A''C''$ zu punktieren.

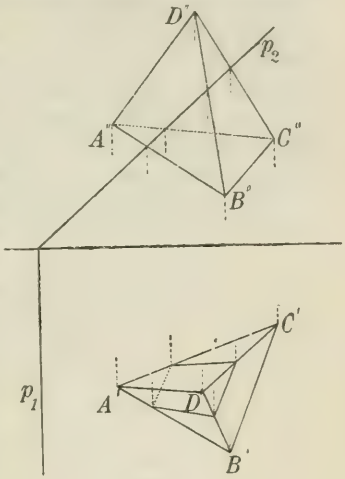


Fig. 25.

In der Grundrißprojektion ist der Umriß $A'B'C'$; der Schnittpunkt von $B'C'$ und der Verlängerung von $A'D'$ über D' hinaus ist die Grundrißprojektion zweier Punkte, von denen der eine auf der Linie AD, der andere auf BC liegt. Von diesen beiden Punkten ist der erste, wie man aus dem Aufriß erkennt, der obere. Also liegt AD über der Ebene ABC, und $A'D'$ muß ausgezogen werden, ebenso auch $B'D'$ und $C'D'$.

Die Schnittlinie des Tetraeders mit einer zur Aufrißebene senkrechten Ebene $(p_1 p_2)$ kann sofort gezeichnet werden, da die Aufrißprojektionen der Schnittpunkte dieser Ebene mit den Tetraederkanten im Aufriß unmittelbar gegeben sind.

27. Um den Schnitt einer beliebigen Ebene mit einem Polyeder (oder einem anderen Körper) zu finden, führt man eine Profilebene der gegebenen Ebene ein (indem man z. B. die erste Orientierung benutzt), projiziert das Polyeder auf diese Ebene und zeichnet die Projektion in der Umklappung. Man führt also in Wirklichkeit eine neue Projektionsebene ein, für welche die gegebene Ebene eine projizierende Ebene ist. In dieser neuen Projektion sind dann die Schnittpunkte der gegebenen Ebene mit den Polyederkanten sofort ersichtlich, und indem man diese Punkte in die ursprüngliche Projektion zurückführt, kann man den ganzen Schnitt leicht zeichnen.

In Fig. 26 ist so die Schnittlinie der Ebene $(p_1 p_2)$ mit einer Pyramide gezeichnet worden, die auf der Grundrißebene aufsteht. (Bei der Zeichnung ist die Schnittebene als durchsichtig aufgefaßt.) Zugleich ist das Profil zur Umklappung des Schnittes in die Grundrißebene benutzt.

28. Soll man nun die Abwicklung der Pyramide zeichnen,

d. h. eine ebene Figur, die von den Seitenflächen der Pyramide gebildet wird, wenn man sie der Reihe nach in der Zeichenebene ausbreitet, so kann man sich z. B. die Pyramide längs einer Seitenkante und allen Grundkanten bis auf eine aufgeschnitten denken und sie dann in der Zeichenebene ausbreiten. Um die Abwicklung zu konstruieren, reicht im vorliegenden Falle hin, daß man die wahre Länge aller Seitenkanten bestimmt. Diese Längen findet man als die Hypotenusen in rechtwinkligen Dreiecken, von denen die Höhe der

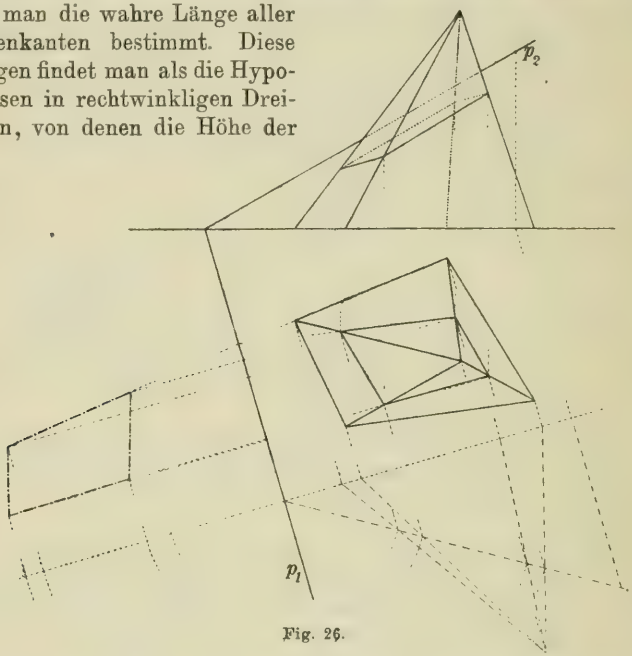


Fig. 26.

Pyramide eine gemeinsame Kathete bildet, während die andere Kathete jedesmal die Grundrißprojektion der betreffenden Kante ist. Da man dann alle Seiten der Seitendreiecke kennt, kann man diese konstruieren.

Der ebene Schnitt läßt sich leicht in die Abwicklung übertragen, da seine Ecken auf die Kanten in der Abwicklung fallen und auf diesen gefunden werden, indem man die wahre Länge eines der Stücke, in welche sie die betreffende Kante teilen, bestimmt.[1])

1) Was wir in 27—28 über Pyramiden gesagt haben, läßt sich vom praktischen Standpunkt aus auch für Kegel (z. B. Kreiskegel) unmittelbar verwerten. Jeder in der Praxis vorkommende (etwa ge-

29. *Abwicklung eines Prismas, dessen Seitenkanten der Aufrißebene parallel sind* (Fig. 27). Man legt einen senkrechten Querschnitt (senkrecht zur Aufrißebene, mit der Aufrißspur p_2) durch das Prisma und klappt ihn in die Aufrißebene um. Denkt man sich nun das Prisma längs einer Seitenkante aufgeschnitten und, ohne auf die Endflächen einstweilen Rücksicht zu nehmen, die einzelnen Seitenparallelogramme in eine Ebene ausgebreitet, so fallen bei dieser Abwicklung die Seiten des Querschnitts in dieselbe zu den Seitenkanten des Prismas senkrechte gerade Linie.

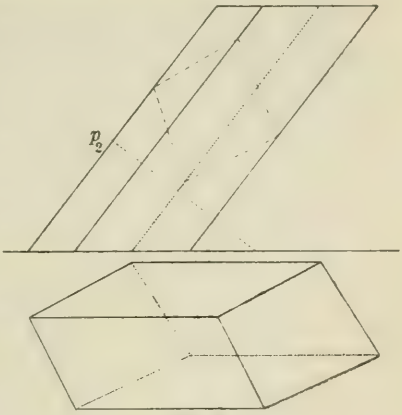


Fig. 27.

Man beginnt also damit (Fig. 27 a), daß man den Querschnitt abwickelt, indem man auf einer geraden Linie n seine Seiten der Reihe nach abträgt. In den Endpunkten der Seiten errichtet man Lote auf n und trägt auf diesen die Stücke ab, in welche die Seitenkanten des Prismas durch den

---

zeichnet vorliegende) Kreis läßt sich immer in eine endliche Anzahl geradliniger Stücke zerlegen, was in mannigfacher Weise geschehen kann; die Lage der Teilpunkte spielt dabei keine wesentliche Rolle, wenn nur die Teilstücke hinreichend klein sind. Ein „praktischer Kreis" kann also immer als Polygon mit endlicher Seitenzahl aufgefaßt werden; die Ecken des Polygons haben aber keine vorausbestimmte Lage, was damit zusammenhängt, daß die geraden Linien, die als Seiten des Polygons (Tangenten des Kreises) gelten, sich so unmerkbar aneinanderreihen, daß je zwei aufeinanderfolgende dieser Linien nicht nur einen einzelnen Punkt, sondern eine ganze Strecke gemein haben. Es folgt hieraus sogleich, daß ein in der Praxis vorkommender Kreiskegel immer als Pyramide aufgefaßt werden kann, indem man eine hinreichend große Anzahl von Seitenlinien des Kegels auswählt, die als Kanten der Pyramiden benutzt werden sollen. Unter diesen Seitenlinien wird man dann immer die Umrißseitenlinien mitnehmen. Es bedarf nun keiner näheren Begründung, wie man ebene Schnitte eines Kreiskegels und dessen Abwicklung praktisch herstellen kann. Aber viele hierher gehörende Fragen lassen sich doch einfacher und genauer durch weitergehende theoretische Untersuchungen beantworten (vgl. 276).

betrachteten Querschnitt zerlegt werden. Die wahren Längen dieser Stücke erkennt man unmittelbar aus dem Aufriß. So sind die Abwicklungen der Seitenflächen bestimmt, und man fügt hierauf die Endflächen an.[1])

30. *Den Schnitt einer Kugel mit einer Ebene zu finden* (Fig. 28). In der Figur ist nur der Fall berücksichtigt, wo die

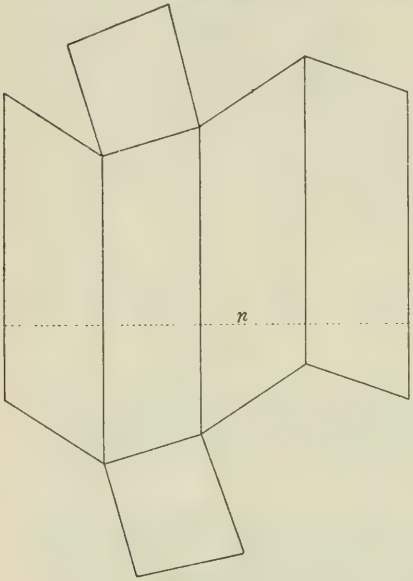


Fig. 27a.

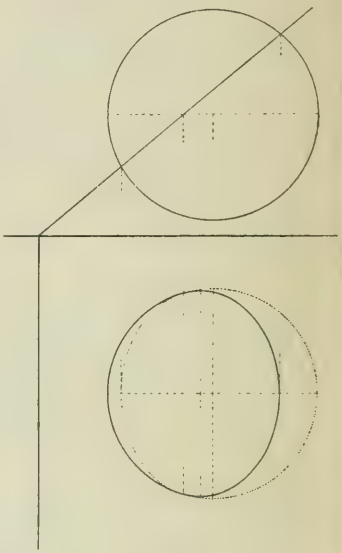


Fig. 28.

gegebene Ebene zur Aufrißebene senkrecht ist. Dann stellt sich im Aufriß der gesuchte Schnittkreis als die geradlinige Strecke dar, welche der Umriß der Kugel von der Aufrißspur der Ebene abschneidet. Insbesondere bestimmen wir die Punkte, die auf den Umriß der Kugel fallen und in einer Höhe mit dem Mittelpunkt der Kugel liegen. Diese Punkte bilden den Übergang vom sichtbaren zum unsichtbaren Teil des Kreises in der Grundrißprojektion. Von der Ellipse, als welche der Kreis sich im Grundriß darstellt, liefern die Schnittpunkte der Aufrißspur mit der Aufrißkontur die Endpunkte der kleinen Achse; die große Achse wird

1) Für die praktische Behandlung eines Zylinders kann man genau die gleiche Methode anwenden, indem man den Zylinder als Prisma auffaßt (vgl. die vorhergehende Fußnote).

gleich der Sehne, die von der Aufrißkontur der Kugel aus der Aufrißspur der Ebene ausgeschnitten wird.

Durchdringungen von Polyedern.

31. Ist eine Ebene durch drei Punkte A, B, C gegeben (Fig. 29) und ein Punkt D der Ebene durch seine Grundrißprojektion D' bestimmt, so zieht man, um die zugehörige Aufrißprojektion D'' zu finden, in der Ebene eine Linie durch D, etwa die Linie AD, die BC in M schneidet, worauf man D'' leicht bestimmen kann.

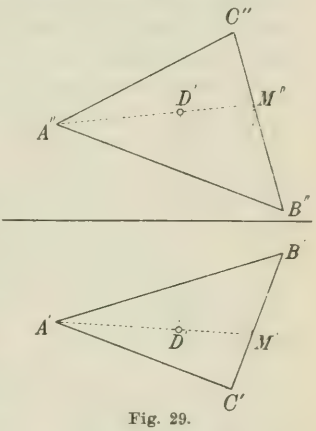


Fig. 29.

Gleichzeitig wird so die Aufgabe gelöst, den Schnittpunkt der Ebene ABC mit einer vertikalen Linie, deren Grundrißprojektion D' ist, zu finden, und wir können sagen, wir haben die Aufgabe dadurch gelöst, daß wir durch die vertikale Linie eine vertikale Ebene mit der Grundrißspur $A'D'$ gelegt und deren Schnittlinie AM mit der Ebene ABC bestimmt haben, worauf sich der gesuchte Punkt als der Schnittpunkt von AM mit der gegebenen vertikalen Linie ergibt.

32. Soll man *den Schnittpunkt einer ebenen undurchsichtigen Dreiecksfläche ABC mit einer schrägen Linie a* bestimmen, so legt man in ähnlicher Weise eine vertikale Hilfsebene durch a, diese schneidet die gegebene Ebene in der Linie MN, und deren Schnittpunkt mit a ist der gesuchte Punkt S (Fig. 30). Die Zeichnung wird dadurch vervollständigt, daß man zunächst die Punkte von a und AC untersucht, welche dieselbe Aufrißprojektion ergeben, aus der Betrachtung der Grundrißprojektion erkennt man dann, welcher von diesen Punkten vorne liegt, und wo demnach die

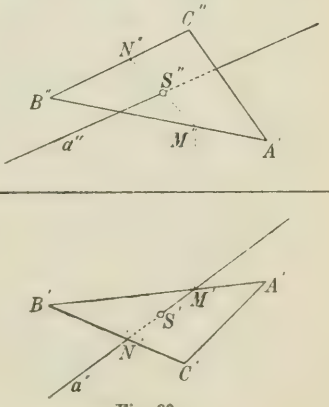


Fig. 30.

Linie a'' auszuziehen ist. Ähnliches gilt auch für die Grundrißprojektion a'.

33. Ganz ebenso bestimmt man auch *die Schnittpunkte einer geraden Linie mit der Oberfläche eines Polyeders.* Man legt eine vertikale Ebene durch die Linie und bestimmt deren Schnitt mit dem Polyeder, dieser Schnitt trifft die gegebene Linie in den gesuchten Punkten. Statt der vertikalen Hilfsebene können wir natürlich auch, indem wir Grundriß und Aufriß ihre Rollen vertauschen lassen, eine zur Aufrißebene senkrechte Ebene benutzen. Das eine wie das andere ist unter Umständen zweckmäßig. Auch schräge Hilfsebenen können in Betracht kommen (vgl. 7 und 11).

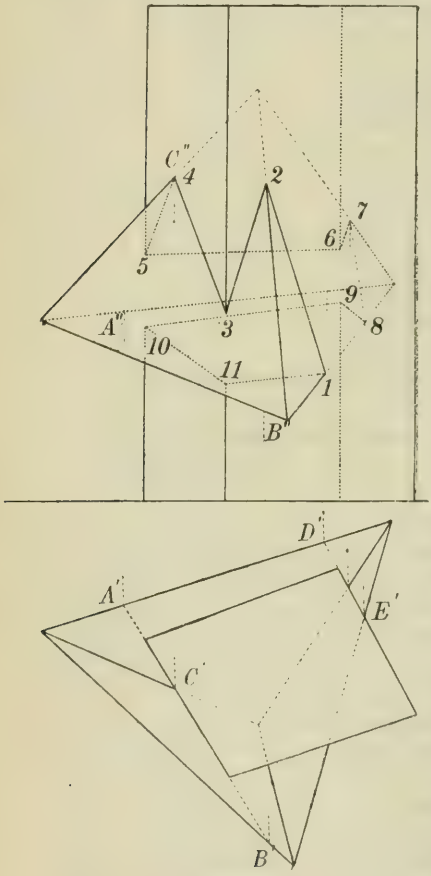


Fig. 31.

34. Wir haben nun die Mittel in der Hand, um die Durchdringung zweier Polyeder zu konstruieren. Diese Durchdringung besteht im allgemeinen aus einem oder mehreren windschiefen Polygonen, deren Seiten Schnittlinien von Seitenflächen der Polyeder sind, und deren Ecken als Schnittpunkte der Kanten des einen Polyeders mit den Seitenflächen des anderen oder umgekehrt entstehen. Es kommt in der Hauptsache darauf an, diese Schnittpunkte zu finden. Die nähere Ausführung wollen wir durch ein paar Beispiele erläutern.

1. Beispiel. Die Durchdringung eines Tetraeders mit einem vertikal gestellten Prisma zu bestimmen (Fig. 31).

Die Schnittpunkte der Pyramidenkanten mit den Seitenflächen des Prismas sind aus dem Grundriß sofort zu entnehmen, die Schnitt-

punkte der Prismenkanten mit den Seitenflächen der Pyramide finden wir durch vertikale Hilfsebenen, die wir durch diese Kanten legen und die hier mit den Seitenflächen des Prismas zusammenfallen. Die näheren Einzelheiten bei der Konstruktion sind folgende: Die Seitenfläche des Prismas, deren Grundrißspur $A'B'$ ist, schneidet das Tetraeder in dem Dreieck ABC, daraus finden wir alle Schnittpunkte der Pyramide mit den Prismenkanten, die in der genannten Seitenfläche liegen. Indem wir nun auch den Schnitt der Pyramide mit der Prismenfläche, deren Grundrißspur $D'E'$ ist, benutzen, finden wir alle Punkte, die in Betracht kommen. Es handelt sich nur noch allein darum, in welcher Reihenfolge sie zu vereinen sind. Dies zeigt sich am anschaulichsten, wenn wir jeden der Teile, in welche die Oberfläche der Pyramide durch ihre Grundrißkontur geteilt wird, für sich betrachten. Jeder dieser Teile wird von dem Prisma in einer gebrochenen Linie geschnitten, deren Grundrißprojektion bekannt ist, und deren Aufrißprojektion sich demnach leicht zeichnen läßt. Die beiden gebrochenen Linien setzen sich in der Figur zu einem einzigen Linienzug zusammen, ihre Ecken sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 auf dem oberen Teil der Pyramide und 8, 9, 10, 11, 1 auf dem unteren Teil. (Die Zahlen sind nur im Aufriß angeschrieben).

2. Beispiel. Durchdringung zweier Pyramiden. In Fig. 32 ist nur eine einzige Projektion der Pyramiden gezeichnet. Die Ebenen der Grundflächen schneiden einander in einer Linie s und die Verbindungslinie ST der Spitzen in P und Q. Die Anordnung ist derart, daß die Grundflächen selbst von der Schnittlinie der Pyramiden nicht getroffen werden, so daß wir nur die Schnittlinien der Seitenflächen zu finden haben. Wir legen eine Hilfsebene durch die Linie ST; wenn diese Hilfsebene sich um ST dreht, durchlaufen ihre Schnittpunkte mit den beiden Pyramidenflächen deren ganze Durchdringung. Um die Ecken dieses Linienzuges zu finden, braucht man nur die genannten Hilfsebenen durch die Seitenkanten der Pyramiden hindurchzulegen. Eine solche Hilfsebene ist die Ebene $P\beta Q$, die durch die Kante SI geht und s in β schneidet. Sie schneidet das von T ausgehende Vierkant in den Linien TA und TF, und diese schneiden SI in zwei Ecken der gesuchten Durchdringung. Auf diese Weise kann man alle Ecken der Durchdringung finden.

Indessen treten so nicht alle Kanten der beiden Pyramidenflächen auf. In der Figur sind alle Ebenen durch ST, die mit den beiden Pyramidenflächen Punkte gemeinsam haben, in dem Flächenwinkel enthalten, dessen Achse ST ist, und der auf der Linie s

die endliche Strecke $\alpha\beta$ abschneidet. Das ganze Dreikant S nimmt also an dem Schnitt teil, wogegen wir von dem Vierkant T nur die beiden Teile gebrauchen, die den Stücken ABC und DEF auf dem Umriß der Grundfläche der Pyramide entsprechen. Diese beiden Teile des Vierkants T (wir bezeichnen sie mit $T(ABC)$ und $T(DEF)$) schneiden jede das Dreikant S

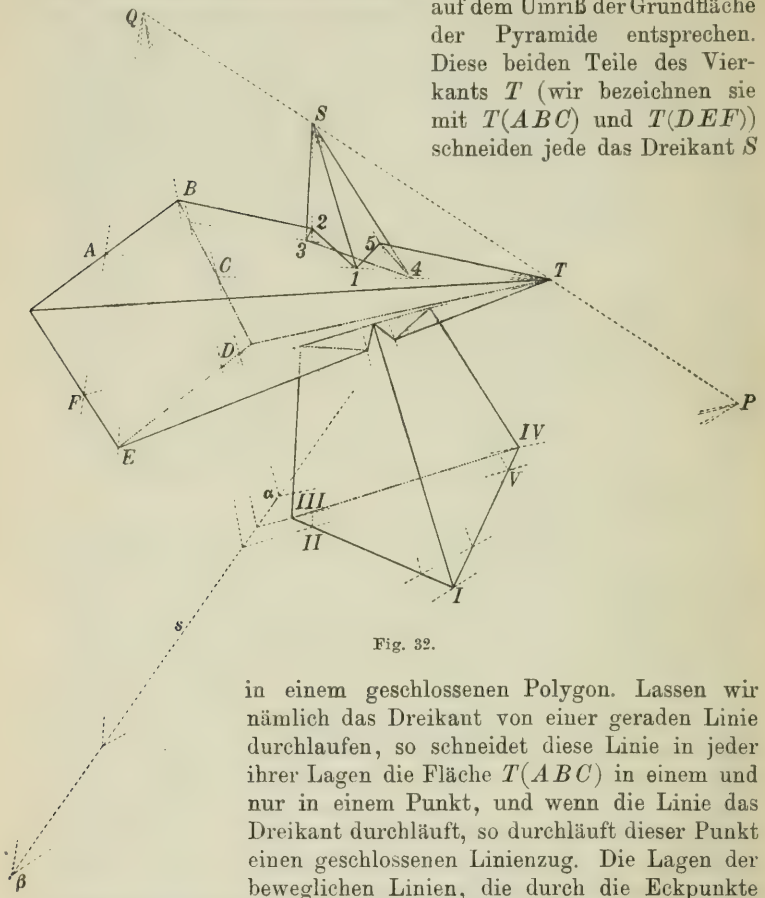


Fig. 32.

in einem geschlossenen Polygon. Lassen wir nämlich das Dreikant von einer geraden Linie durchlaufen, so schneidet diese Linie in jeder ihrer Lagen die Fläche $T(ABC)$ in einem und nur in einem Punkt, und wenn die Linie das Dreikant durchläuft, so durchläuft dieser Punkt einen geschlossenen Linienzug. Die Lagen der beweglichen Linien, die durch die Eckpunkte dieses Linienzuges gehen, sind teils Kanten des Dreikants S, teils schneiden sie eine Kante der Fläche $T(ABC)$. Diese Lagen sind SI, SII, $SIII$, SIV, SV, wobei die Punkte I, II, III, IV, V in der natürlichen Reihenfolge auf der Grundfläche der Pyramide S angenommen sind. Dadurch wird der Schnitt 1, 2, 3, 4, 5 bestimmt. Auf ganz ähnliche Weise wird auch der Schnitt der Fläche $T(DEF)$ bestimmt. In dem vorliegenden Falle durchbohrt die

eine Pyramide die andere, in anderen Fällen wird der Schnitt ein einziges zusammenhängendes Polygon, aber die angegebene Methode kann auch dann zur Anwendung kommen.

Eine ähnliche Methode kann man benutzen, um die Durchdringung einer Pyramide mit einem Prisma, oder vielmehr einer räumlichen Ecke mit einer prismatischen Röhre zu bestimmen, indem man dann eine Linie durch die Spitze der Ecke parallel zu den Seitenkanten des Prismas zieht und Hilfsebenen durch diese Linie und die verschiedenen Kanten der räumlichen Ecke und des Prismas hindurchlegt.

Zur Bestimmung der Durchdringung zweier prismatischer Röhren benutzt man in analoger Weise Hilfsebenen, die zu den Kanten beider Röhren parallel sind.

Bei der Konstruktion ist es nützlich zu beachten, daß die Schnittlinien einer Seitenfläche des einen Polyeders mit zwei verschiedenen Seitenflächen des anderen einander auf der Schnittlinie der letztgenannten Seitenflächen schneiden. Bisweilen ist es leicht, die Schnittlinien einzelner Seitenflächen des einen Polyeders mit der Oberfläche des anderen Polyeders zu finden, was man immer benutzen sollte.[1])

Raumgeometrische Konstruktionen bei besonderen Lagenverhältnissen.

35. Die bis jetzt angegebenen Methoden zur Behandlung der geraden Linie und der Ebene in doppelter Projektion erfordern eine Ergänzung für besondere Lagenverhältnisse.

Wenn eine gerade Linie zur Grundachse senkrecht ist, fallen ihre beiden Projektionen in ein Lot der Grundachse. Die Linie ist dann durch ihre Projektionen nicht bestimmt, sondern muß durch zwei ihrer Punkte A, B festgelegt werden. Um einen dritten Punkt C zu bestimmen, wenn C' bekannt ist, und um die Spurpunkte der Linie zu finden, kann man die Umklappung $A_1 B_1$ in der Grund-

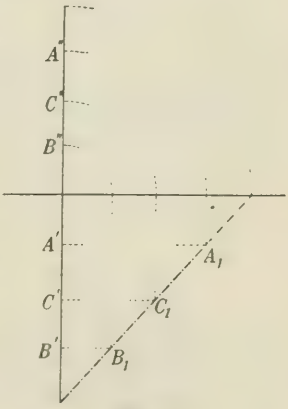


Fig. 33.

1) Praktische Beispiele aus dem Gebiete der Architektur findet man z. B. bei G. Hauck, *Vorlesungen über darstellende Geometrie I*, Leipzig 1912, S. 90–93.

rißebene benutzen (Fig. 33). Das gleiche wird man tun, um den Schnittpunkt der Linie mit einer Ebene zu finden. Was die Beziehungen zwischen den Projektionen der Punkte dieser Linien betrifft, so ist es nützlich zu beachten, daß $\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{A''C''}{B''C''}$, was man auf verschiedene Weise zur Bestimmung von Punkten auf der Linie verwerten kann. Wenn eine gerade Linie auf der Grundachse nahezu senkrecht ist, muß man aus praktischen Gründen ähnliche Betrachtungen anwenden.

36. Die Schnittlinie zweier Ebenen $(r_1 r_2)$ und $(s_1 s_2)$ kann nicht immer durch ihre Spuren bestimmt werden; wenn z. B. die Schnittpunkte der Ebenen mit der Grundachse, wie in Fig. 34, nahezu oder genau zusammenfallen, kann man eine Ebene $(p_1 p_2)$ parallel zu $(r_1 r_2)$ legen und ihre Schnittlinie b mit der Ebene $(s_1 s_2)$ bestimmen. Die gesuchte Schnittlinie a ist hierauf parallel zu b zu ziehen.

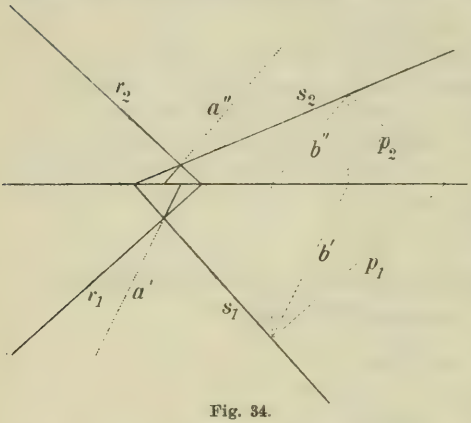


Fig. 34.

Eine Schwierigkeit, die sich öfter einstellt, ist die, daß man die Verbindungsgerade eines Punktes P mit dem Schnittpunkt S von zwei Linien a und b braucht, die nahezu parallel sind. Man kann sich dann helfen, indem man aus P die Lote auf a und b fällt und ihre Schnittpunkte B und A mit b bzw. a verbindet (Fig. 35). Diese Verbindungslinie ist senkrecht auf der gesuchten Linie PS. PA, PB und PS sind nämlich die Höhen in dem Dreieck ABS. Dies ist in Fig. 36 benutzt, um die Schnittlinie der Ebenen $(r_1 r_2)$ und $(s_1 s_2)$ zu finden, indem die

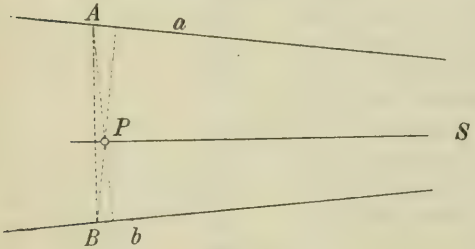


Fig. 35.

Linie von A_1'' nach A_2 hin auf diese Weise gezogen ist. Ferner ist $A_2 A_2'$ als die Höhe in dem Dreieck RSA_2 durch den Schnittpunkt der beiden anderen Höhen in diesem Dreieck bestimmt.

Eine andere Methode ist in Fig. 37 angegeben, wo die Ebenen $(r_1 r_2)$ und $(s_1 s_2)$ mit einer horizontalen Hilfsebene, deren Aufrißspur t_2 ist, zum Schnitt gebracht sind. Die Schnittlinien der gegebenen Ebenen mit dieser Hilfsebene schneiden einander in A und die Punkte A_1 und A bestimmen darauf die gesuchte Linie.

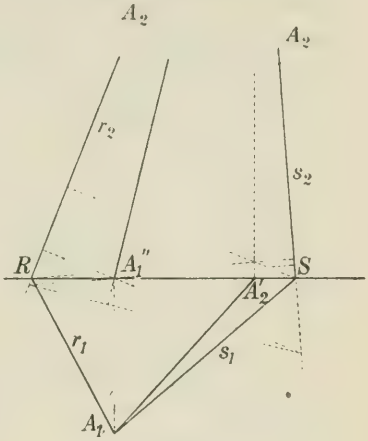


Fig. 36.

37. Endlich wollen wir bemerken, daß eine Ebene nicht immer bequem durch ihre Spuren dargestellt wird. Häufig muß man zwei beliebige einander schneidende Linien, zwei parallele Linien oder drei Punkte zur Bestimmung der Ebene benutzen. Wenn eine Ebene auf diese Weise gegeben ist, so kann man, indem man Linien in der Ebene parallel zu den Projektionsebenen zieht, die Richtungen der Spuren finden, worauf man dann imstande ist, Lote auf die Ebene zu fällen, da die Projektionen der Lote senkrecht zu den genannten Richtungen sind.

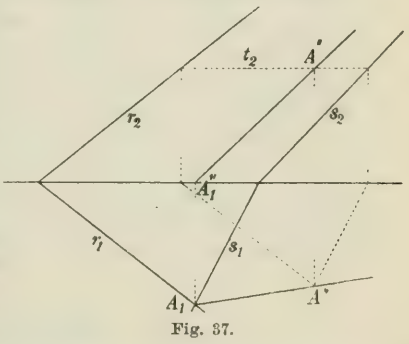


Fig. 37.

Eine Ebene, die durch einen Punkt P senkrecht zu einer Linie a gelegt wird (Fig. 38), kann bestimmt werden, indem man durch P eine Frontlinie und eine Grundlinie in der Ebene zieht. Die beiden Linien seien b und $c (b' \perp x,\ b'' \perp a'',\ c' \perp a',\ c'' \parallel x)$. Will man den Schnittpunkt S der Ebene mit a finden, so kann dieses mit Hilfe einer Vertikalebene durch a geschehen. Die wahre Länge von PS liefert den Abstand des Punktes P von a.

Bisweilen ist es bequem, die wahre Größe einer ebenen Figur durch Umklappung in eine zu einer Projektionsebene parallele

Ebene zu bestimmen. In der Fig. 39 ist die wahre Größe des Winkels $(a\,b)$ durch Umklappung des Winkels in eine horizontale Ebene mit Hilfe einer Drehung um die horizontale Linie c be-

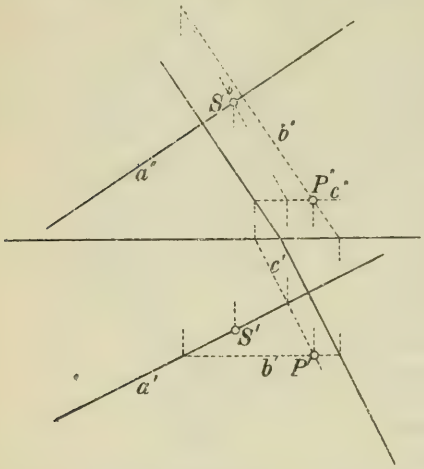


Fig. 38.

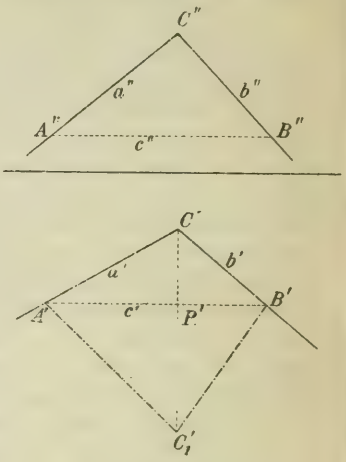


Fig. 39.

stimmt. Die Spitze C stellt sich nach der Umklappung im Grundriß durch einen Punkt C_1 dar, der so liegt, daß $C'P'C_1' \perp A'B'$ wird, während $P'C_1'$ die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck ist, dessen eine Kathete $C'P'$ ist, während die andere die Erhebung von C'' über c'' angibt.

Durch eine solche Umklappung kann man, wenn es sich um größere Figuren handelt, mit Vorteil ein Profil einführen, ebenso wie bei der Umklappung in eine Projektionsebene. Allgemein gilt die Regel, daß die Konstruktion ausgeführt wird, als ob c'' die Grundachse wäre (und c in der Grundrißebene läge).

Umprojizieren.

38. Ist eine Figur $A\,B\,C\,\ldots$ durch zwei Projektionen $A'B'C'\,\ldots$ und $A''B''C''\,\ldots$ dargestellt, so kann es, wie wir gesehen haben, bisweilen nützlich sein, die eine oder andere projizierende Ebene als neue Projektionsebene einzuführen. Wählt man z. B. eine projizierende Ebene bei der ersten Orientierung als neue Aufrißebene, so kann man durch Projektion auf sie und Umklappung der Projektion eine neue Darstellung $A'''B'''C'''\,\ldots$ und

eine dazu gehörende dritte Orientierung erreichen. Hierauf betrachtet man die Figur als gegeben durch die Projektionen $A'B'C' \ldots$ $A'''B'''C''' \ldots$, und es wird nun in diesem System wieder möglich sein, eine neue Projektionsebene einzuführen, die eine projizierende Ebene bei der dritten Orientierung ist. Einen solchen Übergang zu einem neuen System von Projektionsebenen nennt man *Umprojizieren.*

Bei praktischen Darstellungen ist es vielfach üblich, daß man neben den beiden Projektionen des Gegenstandes in Grundriß und Aufriß eine dritte Projektion (*Seitenriß*) auf eine *Seitenrißebene* (d. h. eine Ebene senkrecht zur trennenden Achse) aufzeichnet. Die trennenden Achsen werden dann für gewöhnlich ausgelassen.

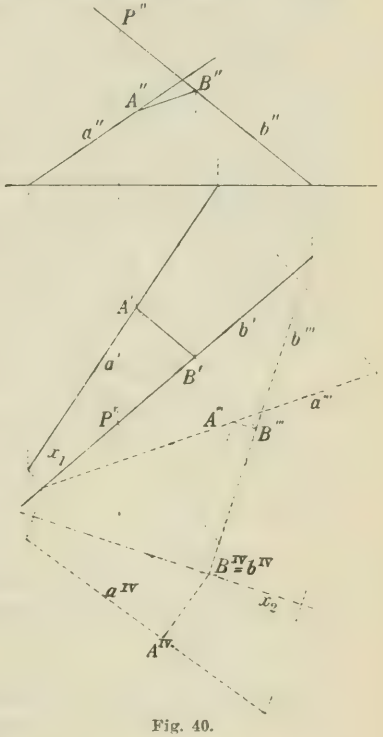


Fig. 40.

39. Durch Umprojizieren kann man erreichen, daß eine beliebige gerade Linie ein Projektionsstrahl in der letzten Orientierung wird. Man kann nämlich zuerst eine neue Projektionsebene parallel zu der Linie (insbesondere durch die Linie hindurch) einführen und darauf noch einmal eine neue Projektionsebene senkrecht zu der Linie.

Dies ist in der Fig. 40 benutzt, um *den kürzesten Abstand zweier windschiefen Linien a und b zu bestimmen.* Wir projizieren so um, daß b ein Projektionsstrahl wird, und haben dann die Aufgabe auf eine bekannte Konstruktion zurückgeführt (5). In der ersten Orientierung ist die vertikale Ebene durch b als neue Projektionsebene eingeführt, so daß man das System $a'b'$ und $a'''b'''$ erhält. (Die Grundachse x_1 fällt mit b' zusammen.) b''' ist als Umklappung von b konstruiert, a''' mit Hilfe von zwei Punkten bestimmt, und zwar sind die Spuren benutzt worden. Von dem System $a'b'$, $a'''b'''$ geht man nun weiter zu einem dritten über, indem man

auf eine projizierende Ebene bei der dritten Orientierung, die zu b senkrecht ist, projiziert, so daß $x_2 \perp b'''$ als neue Grundachse gewählt wird. b projiziert sich dann in dem Punkte b^{IV}, während a sich als die Linie a^{IV} darstellt. In dem System $a'''b'''$ und $a^{IV}b^{IV}$ mit der Grundachse x_2 läßt sich nun der kürzeste Abstand sofort ziehen: $A^{IV}B^{IV}$ ist das Lot von b^{IV} auf a^{IV} und $A'''B'''$ ist parallel zu x_2; darauf wird die Figur in die ursprüngliche Projektion zurückgeführt.

40. Soll *eine Figur durch einen gegebenen Winkel um eine beliebige Linie a gedreht werden*, so kann man ein ähnliches Umprojizieren benutzen. Wenn nämlich die Linie a ein Projektionstrahl ist, läßt sich die Drehung sehr leicht ausführen, und auf diesen besonderen Fall führt man den allgemeinen durch Umprojizieren zurück. Ist insbesondere die Linie a einer der gegebenen Projektionsebenen parallel, so braucht es natürlich nur einen Wechsel der einen Projektionsebene, um a in einen Projektionsstrahl überzuführen.

Das Umprojizieren wird auch als Hilfsmittel bei ungünstigen Lagenbeziehungen verwendet.

Die Mittelebene. Perspektivische Affinität.

41. Bei einer doppelten Projektion liegen die Projektionen von Punkten des ersten und dritten Quadranten auf verschiedenen Seiten der Grundachse, während die Projektionen jedes Punktes des zweiten und vierten Quadranten auf derselben Seite der Grundachse liegen. Ein Punkt A, dessen Projektionen A', A'' zusammenfallen sollen, muß deswegen im zweiten oder vierten Quadranten (oder auf der Grundachse x) liegen, und da die Abstände xA', xA'' die Abstände des Punktes von den Projektionsebenen bedeuten und somit gleich groß werden müssen, muß der Punkt A in der Ebene liegen, die den zweiten und vierten Quadranten halbiert. Diese Ebene heißt die *Mittelebene* und wird mit M bezeichnet.

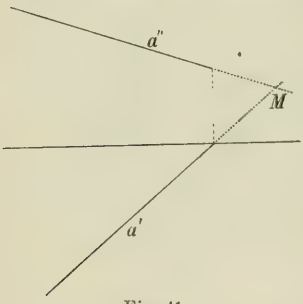


Fig. 41.

Als Beispiel für die Aufgaben, welche die Mittelebene betreffen und sofort durch direkte Betrachtung der ersten oder zweiten Orientierung ihre Lösung finden, wollen wir nennen:

Die Spuren A_1, A_2 einer Linie zu finden, die durch einen gegebenen Punkt A geht und auf der Mittelebene senkrecht ist (es wird $A'A_1 = x\,A''$; A_2 und A_1 fallen zusammen).

Die Spuren einer Ebene zu finden, die durch eine gegebene Linie geht und zur Mittelebene senkrecht ist. Die Ebene muß ein Lot der Mittelebene enthalten, und ihre Spuren müssen deshalb in der Zeichnung die Verlängerung voneinander bilden.

Eine gerade Linie a schneidet im allgemeinen die Mittelebene in einem bestimmten Punkte, dessen Projektionen in den Schnittpunkt $a'\,a''$ zusammenfallen. Dieser Punkt M heißt die *Mittelspur* der Linie (Fig. 41). Ist a' zu a'' parallel, so wird a zur Mittelebene parallel. Fallen a' und a'' zusammen, ohne auf der Grundachse senkrecht zu sein, so liegt die Linie a in der Mittelebene.

42. Eine Ebene schneidet im allgemeinen die Mittelebene in einer bestimmten geraden Linie, welche die *Mittelspur* der Ebene heißt. Ein Punkt der Mittelspur wird sofort gewonnen in dem Schnittpunkte der Ebene mit der Grundachse. (Ist die Ebene der Grundachse parallel, so wird auch die Mittelspur, wenn sie existiert, der Grundachse parallel. Enthält die Ebene die Grundachse, so muß die Mittelspur mit dieser zusammenfallen.) Ein zweiter Punkt wird gefunden, indem man von einer Linie in der Ebene die Mittelspur bestimmt. In Fig. 42 ist insbesondere eine horizontale Linie a der Ebene genommen worden.

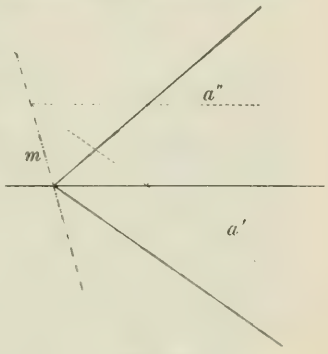


Fig. 42.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Projektionen $A'B'C'\ldots$ und $A''B''C''\ldots$ einer Figur in der Ebene ist nun dadurch charakterisiert, daß:

1. zu jedem Punkte A' ein bestimmter Punkt A'' gehört, derart, daß A' und A'' auf einer Linie von bestimmter Richtung ($\perp x$) liegen,

2. jeder Linie a' eine Linie a'' zugeordnet ist, derart, daß a' und a'' die Mittelspur m in demselben Punkt schneiden (oder beide zu m parallel sind oder mit m zusammenfallen),

3. parallelen Linien a' und b' wieder parallele Linien a'' und b'' entsprechen.

Zwei Figuren einer Ebene, die in einer solchen Beziehung stehen, nennt man *perspektiv affin* oder *parallelperspektiv*; m heißt die *Affinitätsachse*, die Richtung $A'A''$ die *Affinitätsrichtung*. Durch die Affinitätsachse m und ein Paar beliebig gegebener entsprechender

Punkte A', A'', von denen nur keiner auf m liegen darf, ist die ganze Beziehung bestimmt (vgl. Fig. 43). Daß eine perspektive Affinität (wie man die Beziehung selbst nennt) existiert, die den Bedingungen genügt, erkennt man daraus, daß man eine doppelte Projektion einführen kann, bei der A' und A'' die Projektionen eines Punktes A im Raume sind, während m eine Linie der Mittelebene darstellt. Die durch den Punkt A und die Linie m bestimmte Ebene erzeugt durch die doppelte Projektion sofort die gesuchte perspektiv affine Beziehung. Daß diese durch m, A', A'' eindeutig bestimmt ist, erkennt man daraus, daß einem gegebenen Punkte B', der nicht auf der Linie $A'A''$ liegt, ein bestimmter Punkt B'' entspricht. Die Linie $A'B'$ schneidet nämlich m in einem bestimmten Punkte M (oder ist zu m parallel) und B'' bestimmt sich als der Schnittpunkt von $A''M$ und $B'B''$ $A'A''$ (wenn $A'B'$ m, wird die Linie durch A'' parallel zu m und $B'B''$ parallel zu $A'A''$). Zu einem Punkte C' auf der Linie $A'A''$ findet man darauf den entsprechenden Punkt durch Benutzung der Verbindungslinie $B'C'$.

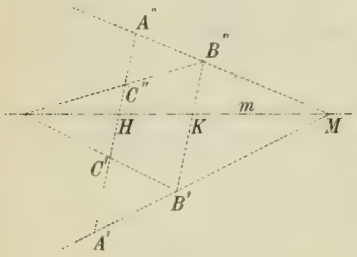


Fig. 43.

Man beachte, daß m die Strecken $A'A''$, $B'B''$, ... in einem konstanten Verhältnisse teilt.

Einen besonderen Fall der perspektiven Affinität haben wir bereits bei der Untersuchung der Beziehung zwischen der Projektion und der Umklappung einer ebenen Figur gefunden (6).

43. Die Ebene, welche den ersten und dritten Quadranten halbiert, enthält alle Punkte, deren Projektionen symmetrisch zur Grundachse liegen. Von einer Ebene, die zu dieser Halbierungsebene parallel ist, fallen die Spuren in eine zur Grundachse parallele Linie s zusammen. Die Mittelspur m der Ebene wird zur Grundachse parallel und verläuft in der Mitte zwischen dieser und s. Von einer Figur in der Ebene liegen also die Projektionen symmetrisch zu m.

Den systematischen Aufbau der Methode der doppelten Projektion verdankt man Gaspard Monge, dessen Vorlesungen hierüber an der École normale in Paris zuerst in dem Journal des écoles normales Bd. I—IV (1795) veröffentlicht wurden. Die erste Ausgabe in Buchform erschien 1798—99 unter dem Titel: *Géometrie descriptive.* (Deutsche Ausgabe, Leipzig 1900, von Robert Haußner in Ost-

walds Klassikern der exakten Wissenschaften, Nr. 117.) Auf diese Weise wurde nicht bloß der Name eingebürgert, den G. Schreiber (*Lehrbuch der darstellenden Geometrie nach Monges Géométrie descriptive vollständig bearbeitet,* Karlsruhe 1828—29) dann in der heute noch üblichen Weise verdeutschte, es wurde auch diese Wissenschaft als ein feststehendes Lehrfach der technischen Ausbildung begründet. Vorher wurden die einschlägigen Kenntnisse meist mit dem Steinschnitt verknüpft; man vgl. vor allem F. A. Frézier, *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois ou Traité de stéréotomie* (Straßburg 1737—39). Unmittelbar nach Monges Vorlesungen und in merkbarer Abhängigkeit von ihnen erschien das kleine Buch von S. F. Lacroix, *Complémens des élémens de géométrie*, Paris 1796. Das erste ausführliche Lehrbuch ist das von Monges Schüler J. N. P. Hachette, *Traité de Géométrie descriptive,* Paris 1822. Darauf folgte C. F. A. Leroy, *Traité de géométrie descriptive suivie de la méthode des plans côtés et de la théorie des engrenages* (Paris 1842), Th. Olivier, *Cours de géométrie descriptive,* Paris 1843—47, und J. M. de la Gournerie, *Traité de géométrie descriptive,* Paris 1860—64. Diese Werke lassen die Entwicklung des Lehrbetriebes der darstellenden Geometrie an der polytechnischen Schule in Paris deutlich erkennen. Für seine weitere Ausgestaltung sind besonders kennzeichnend A. Mannheim, *Cours de géométrie descriptive,* Paris 1880, der die darstellende Geometrie nach der kinematischen Seite hin ausbaute, und M. d'Ocagne, *Cours de géométrie descriptive et de géométrie infinitésimale,* Paris 1896, die sie mit der Krümmungslehre der Kurven und Flächen verknüpfte. In Deutschland lehnte die darstellende Geometrie in Literatur und Unterricht sich lange Zeit eng an die französischen Werke an, bis durch B. Gugler, *Lehrbuch der beschreibenden Geometrie,* Nürnberg 1841, und K. Pohlke, *Darstellende Geometrie,* Berlin 1860, eine originellere Behandlung aufkommt und durch W. Fiedler, *Die darstellende Geometrie,* Leipzig 1871, die organische Verschmelzung der darstellenden Geometrie mit der inzwischen ausgebildeten Geometrie der Lage versucht wird. Die wichtigeren deutschen Lehrbücher finden sich am Schluß zusammengestellt.

Drittes Kapitel.

Parallelprojektion. Axonometrie.

Grundsätze der Parallelprojektion.

44. Unter der Parallelprojektion einer gegebenen Figur $ABC\ldots$ auf eine gegebene Ebene Π in einer gegebenen Richtung r versteht man die Figur $A_1B_1C_1\ldots$, die von den Schnittpunkten der genannten Ebene (der *Projektionsebene*) mit den Strahlen AA_1, BB_1, $CC_1\ldots$ (den *Projektionsstrahlen*), die alle die Richtung r (die *Projektionsrichtung*) haben, gebildet wird. Ist die Projektionsebene zugleich mit der Projektionsrichtung (die man aber nicht der Ebene Π parallel voraussetzen darf) gegeben, so gehört zu jeder Figur im Raume eine bestimmte Projektion. Ist insbesondere $r \perp \Pi$, so geht die schräge Parallelprojektion über in eine senkrechte Projektion. Wir wollen zuerst einige Hauptsätze über die allgemeine Parallelprojektion anführen.

1. *Eine gerade Linie a. die kein Projektionstrahl ist, wird in eine gerade Linie a_1 projiziert.* Ist $a \parallel \Pi$, so wird $a_1 \equiv a$, ein beliebiges Stück der Linie wird dann in seiner wahren Größe projiziert. Ist a nicht $\parallel \Pi$, so geht a_1 durch die Spur von a in Π.

Die Ebene, die die durch die Punkte der Linie gehenden Projektionsstrahlen enthält, heißt die die Linie *projizierende Ebene.*

2. *Die Linien durch einen Punkt A werden in die Linien durch einen Punkt A_1 projiziert*; aber wenn gewisse Linien im Raume in Linien projiziert werden, die durch denselben Punkt gehen, so kann man nicht daraus schließen, daß auch die Linien im Raume durch einen Punkt gehen, vielmehr nur, daß sie einen bestimmten Projektionsstrahl schneiden.

3. *Parallele Linien, die keine Projektionsstrahlen sind, werden in parallele Linien projiziert* (oder ihre Projektionen fallen in eine gerade Linie zusammen).

4. *Strecken auf derselben geraden Linie (oder auf parallelen Linien) sind ihren Projektionen proportional.*

Für jede gerade Linie im Raume gibt es also bei gegebener Projektionsrichtung und -ebene eine bestimmte Zahl, welche das Verhältnis zwischen der Projektion einer beliebigen Strecke auf der Linie und deren wahrer Länge angibt. Diese Zahl heißt das *Projektionsverhältnis* der Linie. Sie ist dieselbe für alle zueinander parallele Linien.

5. Wenn zwei ebene Figuren $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ in zwei verschiedenen Ebenen, deren Schnittlinie s sei, durch Parallelprojektion in einer gegebenen Richtung r auseinander hervorgehen, so entspricht jedem Punkt der einen Figur ein bestimmter Punkt der anderen Figur, derart, daß die Verbindungslinie der beiden Punkte die Richtung r hat. Jeder geraden Linie der einen Ebene entspricht eine gerade Linie in der anderen Ebene, und zwei einander so entsprechende Linien schneiden sich immer auf s (oder sind zu s parallel).

Betrachtet man nun eine Parallelprojektion der zwei Figuren auf die Zeichenebene (Fig. 44), so entstehen in dieser zwei Figuren, $A_1B_1C_1\ldots$ und $A'_1B'_1C'_1\ldots$, die parallelperspektiv sind, wobei s_1 die Affinitätsachse und r_1 die Affinitätsrichtung wird. So werden z. B. zwei ebene Schnitte desselben Zylinders (oder Prismas) in Parallelprojektion als parallelperspektive Figuren dargestellt.

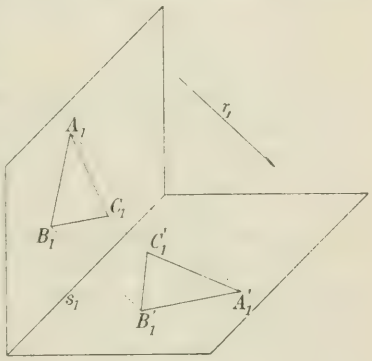


Fig. 44.

6. Wird eine Figur $ABC\ldots$ in der Ebene Π in eine andere Ebene Π_1 um die Schnittlinie der beiden Ebenen herumgedreht, so wird die so erzeugte Figur $A'B'C'\ldots$ die Parallelprojektion der gegebenen Figur für eine Projektionsrichtung, die zu der Halbierungsebene Γ des Winkels zwischen den Ebenen Π, Π_1 senkrecht ist. Die beiden Figuren liegen nämlich symmetrisch zu Γ.

Nach dem vorhergehenden Satz liefern dann die beiden Figuren durch Parallelprojektion auf die Zeichenebene zwei parallelperspektive Figuren. Wenn insbesondere eine ebene Figur $ABC\ldots$ in die Zeichenebene umgeklappt wird, so wird die entstehende Umklappung zu der Projektion $A_1B_1C_1\ldots$ der gegebenen Figur parallelperspektiv.

45. Bei der Darstellung der Körper in Parallelprojektion

kommen dieselben Regeln bezüglich des Sichtbaren und Unsichtbaren zur Anwendung wie bei der senkrechten Projektion. Die Oberfläche jedes konvexen Körpers zerfällt in zwei Teile, einen sichtbaren und einen unsichtbaren, und die Grenze zwischen diesen erscheint als der Umriß der Projektionsfigur.

Die allgemeine axonometrische Darstellung.

46. Ein einziges in Parallelprojektion hergestelltes ebenes Bild $A_1 B_1 C_1 \ldots$ kann wohl eine gewisse Vorstellung von der dargestellten Figur $ABC\ldots$ geben, aber sie nicht vollständig bestimmen. Wir wollen nun ein Verfahren angeben, wie man doch in einer solchen einfachen Parallelprojektion mit Hilfe der Projektionen x_1, y_1, z_1 und der zugehörigen Projektionsverhältnisse von drei gegebenen Achsen *x, y, z (Koordinatenachsen)* im Raume (Fig. 45), die einen Punkt O gemein haben, aber nicht in derselben Ebene liegen, die Lage eines beliebigen Punktes P im Raume vollständig angeben kann. Die Ebenen xy, yz, zx heißen *Koordinatenebenen*.

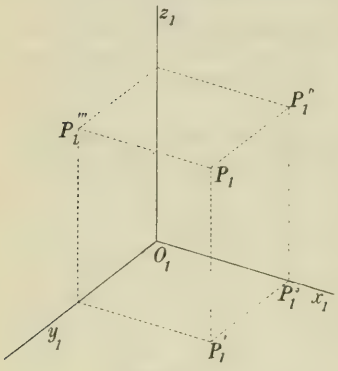


Fig. 45.

Wir projizieren P in der Richtung z auf die xy-Ebene in P'. Da die Strecke PP' zu z parallel ist, wird ihr Bild $P_1 P_1'$ $\| z_1$. Durch P' ziehen wir $P'P^0 \| y$, $P_1' P_1^0$ ist dann $\| y_1$. P kann nun im Raume durch die Strecken OP^0, P^0P' und $P'P$ bestimmt werden, deren Vorzeichen man in Übereinstimmung mit den Richtungen x, y, z rechnet. Diese Strecken heißen die *Koordinaten* des Punktes P. Kennt man P_1 und P_1', so kann man P_1^0 finden, indem man $P_1' P_1^0 \| y_1$ zieht. Die Koordinaten werden dann im Bilde durch die drei Strecken $O_1 P_1^0$, $P_1^0 P_1'$, $P_1' P_1$ dargestellt. Die wahren Längen der Koordinaten kann man finden, wenn die Projektionsverhältnisse der drei Achsen x, y, z bekannt sind.

Wir bemerken, daß auch die Projektionen P'' und P''' des Punktes P auf die xz-Ebene in der Richtung y und auf die yz-Ebene in der Richtung x sofort im Bilde gefunden werden können. Man findet die Projektion P_1'' auf die xz-Ebene im Bilde unmittelbar als vierte Ecke des durch P_1, P_1', P_1^0 bestimmten Par-

allelogramms. Das Bild P_1''' der Projektion auf die yz-Ebene wird gefunden, indem man $P_1 P_1'''$ gleich und parallel zu $P_1^0 O_1$ macht. Die Projektion P' auf die xy-Ebene nennen wir die *Grundrißprojektion*, die Projektion P'' auf die xz-Ebene die *Aufrißprojektion* und die Projektion P''' auf die yz-Ebene die *Seitenrißprojektion* des Punktes P. Das Bild P_1 wird als *axonometrisches Bild* bezeichnet.

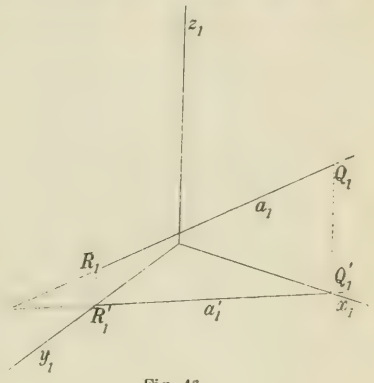


Fig. 46.

47. Eine *gerade Linie* a kann man durch die Bilder a_1 und a_1' (axonometrisches Bild und Grundriß) darstellen (Fig. 46), ihre Spur P in der xy-Ebene wird durch den Schnittpunkt P_1 von a_1 und a_1' gegeben. Die Spuren Q und R in den anderen Koordinatenebenen findet man dadurch, daß die Grundrißprojektionen auf x und y fallen müssen.

48. Eine Ebene kann man sich durch irgend zwei in ihr liegende Linien gegeben denken, insbesondere durch ihre Spuren in zwei Koordinatenebenen. In Fig. 47 ist eine Ebene dargestellt, die nicht durch den Koordinatenanfangspunkt O geht und alle drei Koordinatenebenen schneidet. Die Bilder der Spuren sind p_1, q_1 und r_1. Sie begrenzen ein Dreieck, dessen Ecken auf den Koordinatenachsen liegen. Von jeder geraden Linie in der Ebene liegt die Spur auf der Spur der Ebene. Ein Punkt P der Ebene ist eindeutig bestimmt durch sein Bild P_1. Man findet die zugehörige Grundrißprojektion, indem man z. B. das Dreieck $P_1 P_0 P_1'$ konstruiert, dessen Seiten der Reihe nach zu q_1, x_1, z_1 parallel sind.

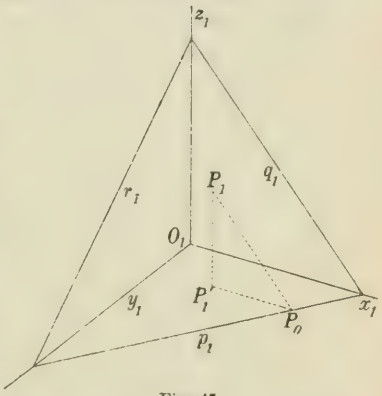


Fig. 47.

Die *Schnittlinie zweier Ebenen* bestimmt man durch ihre Spuren, die man als die Schnittpunkte der entsprechenden Spuren

der Ebenen findet. In besonderen Fällen kann man aber die Schnittlinie nicht auf diese Weise bestimmen. Die allgemeine Methode ist dann die, daß man eine passende Hilfsebene einführt. Die Spuren der Ebenen in dieser Hilfsebene schneiden einander in einem Punkte der gesuchten Linie, und auf dieselbe Weise kann man noch einen Punkt der Schnittlinie finden. Parallele Ebenen haben parallele Spuren.

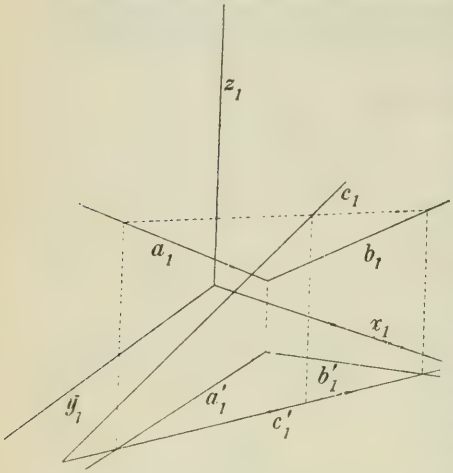


Fig. 48.

Den *Schnittpunkt einer Ebene mit einer geraden Linie* bestimmt man daraus, daß er auf der Schnittlinie der gegebenen Ebene mit einer willkürlichen Hilfsebene, die durch die gegebene Linie hindurchgeht, liegen muß. In Fig. 48 ist auf diese Weise der Schnittpunkt der Linie c mit der durch zwei einander schneidende Linien a und b bestimmten Ebene ab bestimmt. Als Hilfsebene ist die Ebene cc' benutzt. Sie schneidet a und b in zwei Punkten, deren Grundrißprojektionen die Schnittpunkte von c' mit a' und b' sind. Die Verbindungslinie der gefundenen Punkte schneidet dann c in dem gesuchten Punkt.

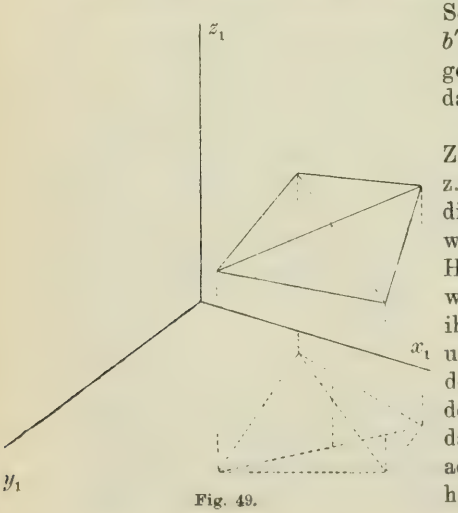


Fig. 49.

49. Was die Anlage der Zeichnung betrifft, so kann man z. B. festsetzen, daß das Koordinatensystem so angenommen werden soll, daß die positiven Halbachsen sichtbar werden, wenn die Koordinatenebenen in ihrer ganzen Ausdehnung als undurchsichtig angesehen werden. Die positiven Quadranten der Koordinatenebenen werden dann sichtbar und jede der Halbachsen x_1, y_1 und z_1 fällt außerhalb des Winkels, der von den

anderen beiden begrenzt wird. Die Koordinatenebenen verdecken also jeden Punkt, von dem wenigstens eine Koordinate negativ ist.

Haben zwei Punkte A und B dasselbe axonometrische Bild, so kann man aus den Bildern der Grundrißprojektionen A_1' und B_1' entnehmen, welcher der Punkte sichtbar ist. Verläuft $A_1'B_1'$ in der Richtung der Halbachse z_1, so wird B durch A verdeckt. In Fig. 49 ist ein Tetraeder durch die axonometrische Ansicht samt der Grundrißprojektion dargestellt. Welche der zwei Kanten, deren Bilder einander innerhalb des Umrisses schneiden, sichtbar ist, ist aus der Grundrißprojektion der Punkte auf diesen Kanten, die dasselbe axonometrische Bild haben, bestimmt.

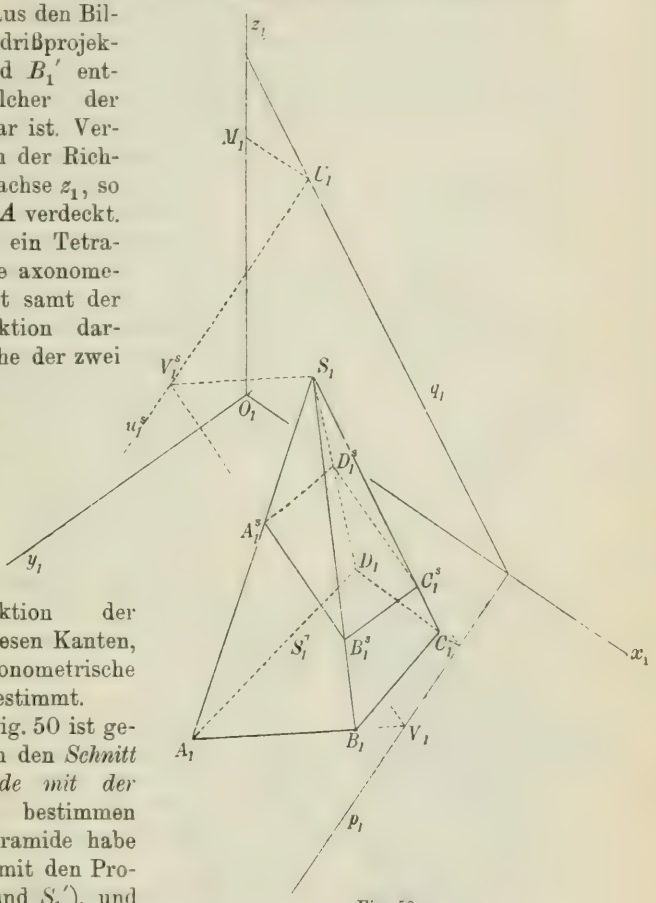


Fig. 50.

50. In Fig. 50 ist gezeigt, wie man den *Schnitt einer Pyramide mit der Ebene* (pq) bestimmen kann. Die Pyramide habe die Spitze S (mit den Projektionen S_1 und S_1'), und die Grundfläche $ABCD$ liege in der xy-Ebene. Wir suchen die Schnittlinie von (pq) und der Seitenfläche SAB der Pyramide, indem wir die beiden Ebenen zuerst mit der xy-Ebene und darauf mit einer Ebene durch S parallel zur xy-Ebene zum Schnitt bringen. Die Ebenen (pq) und SAB werden von der xy-Ebene in den Linien p und AB geschnitten, diese Linien schneiden dann einander in einem Punkte V

der gesuchten Schnittlinie. Die zur xy-Ebene parallele Ebene durch S hat eine Aufrißspur MU x, die durch die Beziehung $O_1M_1 = S_1'S_1$ bestimmt wird. Diese Ebene schneidet die Ebene (pq) in die Linie u^s, die zu p parallel ist und durch U geht, während sie die Ebene SAB in einer zu AB parallelen Linie durch S schneidet. Hierdurch wird ein neuer Punkt V^s der gesuchten Schnittlinie VV^s bestimmt, damit aber ist die Seite A^sB^s der gesuchten Schnittfigur bestimmt, und die Konstruktion kann leicht vervollständigt werden. Die Ebene (pq) ist in der Figur als durchsichtig angesehen.

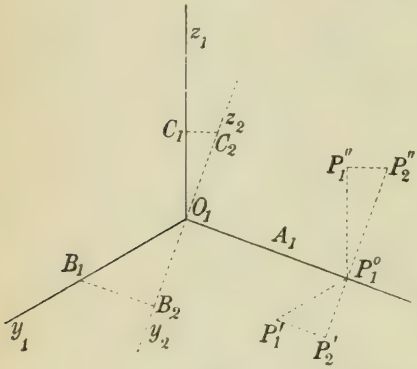


Fig. 51.

51. Im folgenden nehmen wir an, daß das Koordinatensystem rechtwinklig ist. Die Projektionsverhältnisse für die Koordinatenachsen sollen dadurch gegeben sein, daß auf x_1, y_1 und z_1 drei Strecken $O_1A_1 = l$, $O_1B_1 = m$ und $O_1C_1 = n$ abgetragen sind, welche die Bilder von drei gleich großen Strecken von der Länge k auf den Koordinatenachsen angeben (Fig. 51). Wenn nun der gegebene Punkt P die Koordinaten x, y, z hat und deren Projektionen durch x_1, y_1 und z_1 bezeichnet werden, so findet man

$$(1) \qquad \frac{x_1}{x} = \frac{l}{k}, \quad \frac{y_1}{y} = \frac{m}{k}, \quad \frac{z_1}{z} = \frac{n}{k};$$

x_1, y_1 und z_1 liest man aus der Figur ab, und die wirklichen Längen können darauf konstruiert werden.

Wir wollen noch bemerken, daß wir durch die Gleichungen (1) auch x_1, y_1 und z_1 konstruieren können, wenn x, y und z bekannt sind.

Ändert man in den Gleichungen (1) den Wert von k, so erhält man eine Figur, die zu der ursprünglichen ähnlich ist. Da man aber den Maßstab beliebig wählen kann, so ist an dieser Veränderung nichts gelegen, und man kann z. B. $k = l$ annehmen. Dann erhält man für die Koordinaten des entsprechenden Punktes P_2 der ähnlich transformierten Figur

$$(2) \qquad x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1 \frac{l}{m}, \quad z_2 = z_1 \frac{l}{n},$$

und man kann das zugehörige System x_2, y_2, z_2 folgendermaßen aus x_1, y_1, z_1 konstruieren (Fig. 51): Man läßt die Halbachsen x_2 und x_1 zusammenfallen und nimmt die y_2- und z_2-Achse in der Zeichenebene zu x_2 senkrecht an. Darauf trägt man $O_1 B_2 = O_1 C_2 = O_1 A_1$ auf y_2 und z_2 ab. Ist nun ein Punkt P der ursprünglichen Figur gegeben durch P_1' und P_1'', so errichtet man in P_1^0 die Strecken $P_1^0 P_2'$ und $P_1^0 P_2''$ senkrecht zu x_1, derart, daß die Systeme $P_1^0 P_1' P_2'$ und $P_1^0 P_1'' P_2''$ den Systemen $O_1 B_1 B_2$ und $O_1 C_1 C_2$ ähnlich werden; es wird dann nach den Gleichungen (2) $O_1 P_1^0 = x_2$, $P_1^0 P_2' = y_2$, $P_1^0 P_2'' = z_2$, und der Punkt P_2 der transformierten Figur ist somit durch Grundriß P_2' und Aufriß P_2'' in gewöhnlicher doppelter Projektion mit x_1 als trennender Achse dargestellt. Die angegebene Konstruktion läuft offenbar darauf hinaus, *daß P_2' und P_2'' aus P_1' und P_1'' durch zwei perspektivische Affinitäten abgeleitet werden, deren gemeinsame Affinitätsachse x_1 ist, während die erste Affinität den Punkt B_1 in B_2, die zweite C_1 in C_2 überführt.*

Mit Hilfe dieser Methode kann man von der allgemeinen axonometrischen Darstellung einer Figur zu einer gewöhnlichen doppelten Projektion übergehen, und durch diese Darstellung Aufschluß über wahre Größen der vorliegenden Figur erhalten.

Die wahre Bedeutung der axonometrischen Methode liegt aber wesentlich darin, *daß sie durch ein einziges Bild eine anschauliche Darstellung des Gegenstandes liefert, aus welcher man unmittelbar mit Hilfe der drei Richtungen x_1, y_1, und z_1 und der zugehörigen Maßstäbe die Dimensionen bezüglich der Hauptrichtungen des Gegenstandes ablesen kann, ohne daß man sich mit der Projektionsrichtung oder mit den Lagen-*

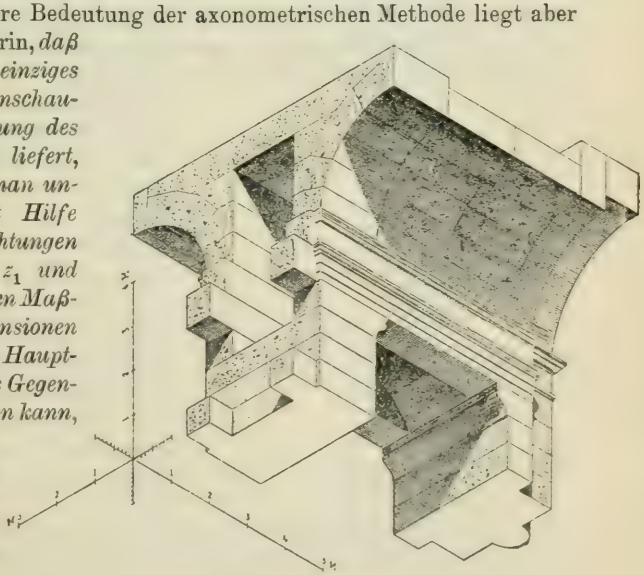


Fig. 52.

beziehungen des Gegenstandes und der Zeichenebene irgendwie zu beschäftigen hat. Daß man dabei über die Richtungen x_1, y_1, z_1 und über die Maßstäbe nach den praktischen Bedürfnissen frei verfügen kann, wird aus dem im folgenden (243) zu beweisenden Pohlkeschen Satz hervorgehen[1]). Als Beispiel weisen wir auf Fig. 52[2]) hin, bei der die Maßstäbe einander gleich angenommen sind. Man beachte die auffallend plastische Wirkung der Figur.

Von besonderen Fällen der Axonometrie, die zu speziellen Betrachtungen Anlaß geben, behandeln wir im folgenden noch die *Kavalierperspektive* und die *orthogonale Axonometrie*.

Kavalierperspektive.

52. Die Achsen x und z liegen dann in der Zeichenebene, und die zugehörigen Koordinaten werden in der wahren Größe dargestellt. Wir wählen außerdem für das Projektionsverhältnis der y-Achse den Wert $\frac{1}{2}$, so daß alle y-Koordinaten sich in halber Größe darstellen, aber die angegebenen Methoden werden natürlich von dieser besonderen Annahme nicht wesentlich beeinflußt.

Die Aufrißprojektion wird eine senkrechte Projektion auf die Zeichenebene und der Abstand der Aufrißprojektion eines Punktes von seiner schiefen Projektion (wie die axonometrische Projektion in diesem Falle gewöhnlich genannt wird) gibt den Abstand des Punktes von der Zeichenebene in halber Größe an. Dies kann man zu metrischen Konstruktionen (Konstruktionen von wahren Längen und Winkeln) benutzen, indem man so die Behandlung unmittelbar auf die in dem ersten Kapitel aufgestellten Methoden zurückführen kann.

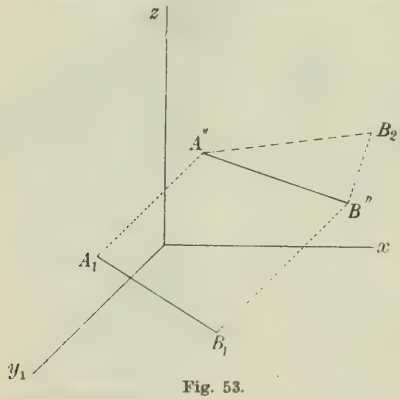


Fig. 53.

1. Beispiel. Den Abstand zweier Punkte A und B zu finden (Fig. 53).

1) Vgl. d'Ocagne, *Géométrie descriptive*, Paris 1896, Chapitre II.

2) Sie stammt aus dem Werke A. Choisy, *L'Art de Bâtir chez les Romains*, Paris 1873 (pl. XVII).

Die Punkte seien durch ihre schiefen Projektionen A_1 und B_1 und ihre Aufrißprojektionen A'' und B'' bestimmt; sind sie auf andere Weise gegeben, so müssen die angeführten Projektionen erst bestimmt werden. Der gesuchte Abstand $A''B_2$ wird als die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck bestimmt, dessen eine Kathete $A''B''$ ist, während die andere $B''B_2 = 2\,A''A_1 - B''B_1$ wird.

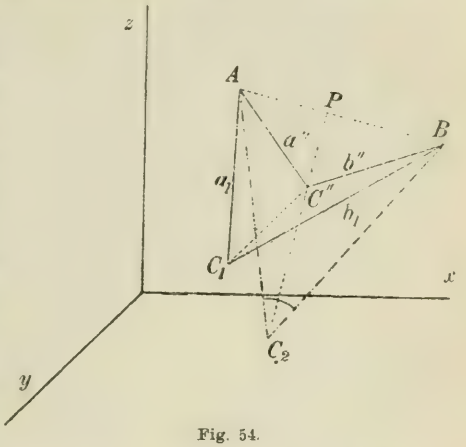


Fig. 54.

2. Beispiel. Den Winkel zwischen zwei sich schneidenden Linien a und b zu finden (Fig. 54)

Die Linien seien bestimmt durch ihre schiefen Projektionen und ihre Aufrißprojektionen. Ihre Aufrißspuren seien A und B, ihr Schnittpunkt C. Um den Winkel $(ab) = \angle\, ACB$ zu finden, legt man den Punkt C durch Drehung um AB in die Zeichenebene um. Der gesuchte Punkt C_2 liegt auf $C''P \perp AB$ in einem Abstande von P, welcher die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten PC'' und $C''C = 2\,C''C_1$ ist. Der Winkel AC_2B ist dann der gesuchte Winkel.

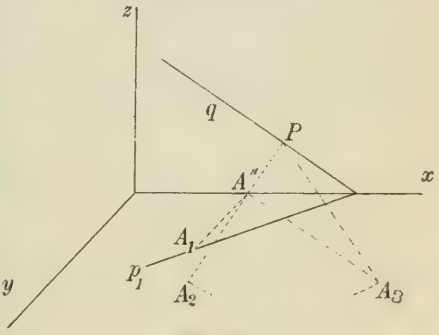


Fig. 55.

3. Beispiel. Umklappung einer Ebene (pq) (Fig. 55).

Auf p wählen wir einen Punkt A, den wir uns durch seine Projektion A'' auf die Zeichenebene und den Abstand $2\,A''A_1$ von ihr bestimmt denken. Dann läßt sich sofort das Profil PA_3 der Ebene zeichnen und die Konstruktion kann wie früher ausgeführt werden. Indessen ist es wichtig, zu beachten, daß, sobald der Punkt A umgeklappt ist (in der Figur auf A_2), der Übergang von der schiefen Projektion zur Umklappung vollständig bestimmt

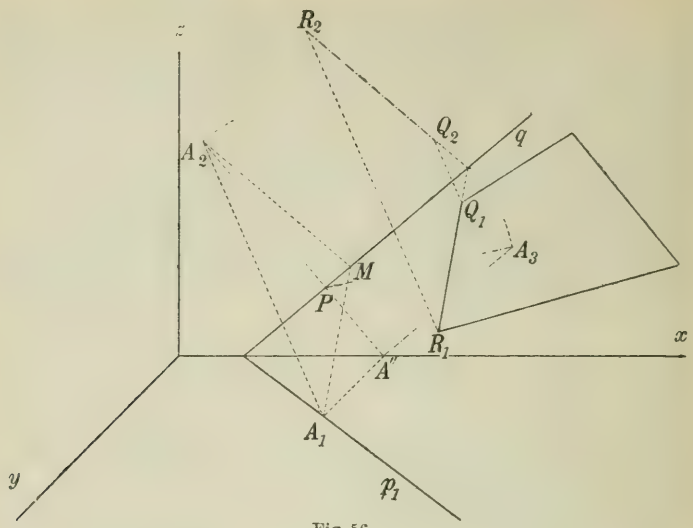


Fig. 56.

ist. Wir wissen nämlich, daß die schiefe Projektion $A_1B_1C_1\ldots$ einer Figur in der Ebene und die Umklappung $A_2B_2C_2\ldots$ derselben Figur affin perspektiv sind, wobei q die Affinitätsachse ist, und diese Affinität ist durch ein Paar entsprechender Punkte A_1 und A_2 bestimmt. (Vgl. Fig. 56.) Man kann sie für die Umklappung aller anderen Punkte und Linien der Ebene benutzen. (In der Figur ist R_2Q_2 aus R_1Q_1, $A_1M \parallel R_1Q_1$, $A_2M \parallel R_2Q_2$.)

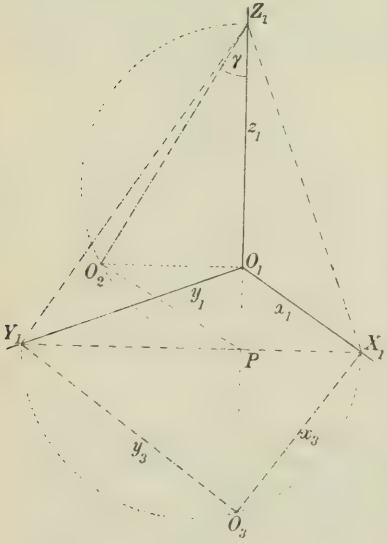


Fig. 57.

Orthogonale Axonometrie.

53. Hierbei wird eine senkrechte Projektion auf die Zeichenebene angewandt. Sind die Projektionen x_1, y_1, z_1 der Achsen gegeben, so sind die Richtungen der Achsen x, y, z im Raume bestimmt. Eine beliebige, zur Zei-

chenebene parallele Ebene (Grundebene) schneidet nämlich das Koordinatenkreuz in einem Dreieck XYZ (Fig. 57), von dem x_1, y_1, z_1 die Höhen werden (12), und der Abstand O_1O_2 des Anfangspunktes von jener Grundebene kann durch Umklappung der die z-Achse projizierenden Ebene in die Grundebene gefunden werden, indem O_2 auf dem Halbkreis über Z_1P als Durchmesser und auf dem Lot O_1O_2 von z_1 liegt. Damit findet man zugleich den Winkel γ der z-Achse gegen die Grundebene (Zeichenebene). Außerdem haben wir die Umklappung der xy-Ebene in die Grundebene angedeutet; O fällt nach O_3, während $O_1O_3 = z_1$ und der Winkel $X_1O_3Y_1 = 90^0$ wird, womit die Umklappungen x_3 und y_3 von x und y bestimmt sind.

Koordinaten von gegebener Größe können mit Hilfe der angeführten Umklappungen abgetragen werden. Aber es ist doch oft viel bequemer, folgendes Verfahren zu benutzen. Von einer festen Halbachse s aus tragen wir die Winkel (sx'), (sy'), (sz') mit demselben Scheitel S ab, die wir gleich dem Komplement der von den Achsen mit der Zeichenebene gebildeten Winkel machen. Soll man nun zum Beispiel eine x-Koordinate von gegebener wahrer Größe abtragen (Fig. 58), so nimmt man diese Größe in den Handzirkel und trägt sie auf x' von S bis M ab, mißt darauf direkt den Abstand des Punktes M von der Linie s (ohne ihn erst zu zeichnen) und hat damit die Projektion der x-Koordinate, diese kann man dann sofort auf x_1 abtragen. Ebenso trägt man die anderen Koordinaten ab.

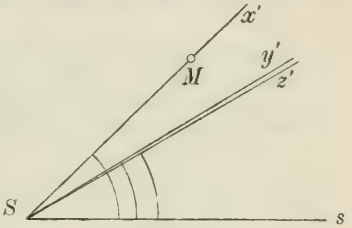


Fig. 58.

Die Projektionsverhältnisse der Achsen werden durch die Cosinus der Winkel gegeben, welche die Achsen mit der Zeichenebene bilden, oder durch die Sinus der Winkel, welche sie mit der Normalen dieser Ebene bilden. Da die Cosinus der letztgenannten Winkel die Quadratsumme 1 haben, wird *die Quadratsumme der drei Projektionsverhältnisse gleich 2.*

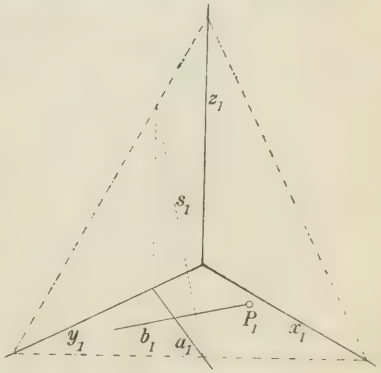


Fig. 59.

Was die besonderen Me-

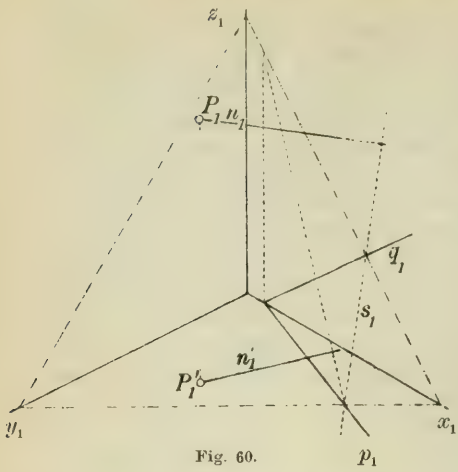


Fig. 60.

thoden zur Auffindung von wahren Längen und Winkeln betrifft, so wollen wir uns mit ein paar Beispielen begnügen.

1. Beispiel. Der Abstand zweier Punkte A und B kann als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, von dem der Unterschied der z-Koordinaten von A und B die eine Kathete und $A'B'$ die andere Kathete bildet, gefunden werden. Die erste Kathete ermittelt man durch die Umklappung der z-Achse, die zweite durch die Umklappung der xy-Ebene.

2. Beispiel. In der xy-Ebene sei eine gerade Linie a und ein Punkt P gegeben. Von P soll man ein Lot auf a fällen (Fig. 59).

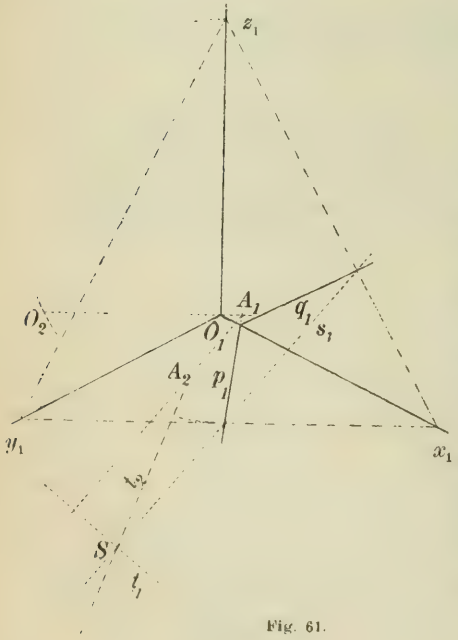


Fig. 61.

Durch a legen wir eine Ebene parallel zu z. Ihre Spur in einer passend gewählten Grundebene sei s. Die gesuchte Linie b wird dann senkrecht zu dieser Ebene und ihr Bild b_1 senkrecht zu s_1.

3. Beispiel. Durch einen gegebenen Punkt eine Senkrechte zu einer gegebenen Ebene mit den Spuren p und q zu ziehen (Fig. 60).

Die Spur der Ebene in einer Grundebene sei s. Das axonometrische Bild der gesuchten Normale n_1 wird senkrecht zu s_1, während ihre Grundrißprojektion n_1' sich dadurch bestimmt, daß $n' \perp p$ sein muß.

4. Beispiel. Umklappung einer Ebene (pq) (Fig. 61).

Man zeichnet die Spur s

der Ebene in einer Grundebene. Die Ebene denkt man sich sodann bestimmt durch s und einen ihrer Punkte, z. B. den Punkt A auf der Grundrißspur der Ebene, der in demselben Abstande von der Grundebene wie O liegt ($O_1 A_1 \perp z_1$). Das Profil der Ebene t_2 kann darauf gezeichnet und wie gewöhnlich benutzt werden ($t_1 \perp s_1$ schneidet s_1 in S, $A_1 A_2$ ist $\perp t_1$, und der Abstand des Punktes A_2 von t_1 wird gleich $O_1 O_2$, worauf $A_2 S$ das gesuchte Profil ist).

Näheres über spezielle Fragen der Axonometrie findet man, außer in den bekannten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie von Fiedler, Wiener, Rohn-Papperitz, in den folgenden Werken:

A. Sopwith, *Treatise on isometrical drawing.* London 1834.

O. Möllinger, *Isometrische Projektionslehre.* Solothurn 1840.

J. L. Weisbach, *Anleitung zum axonometrischen Zeichnen.* Freiberg 1857.

R. Skuhersky, *Orthographische Parallelperspektive.* Prag 1858.

L. Burmester, *Grundzüge der schiefen Parallelperspektive* (Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Bd. 16, S. 449) 1871.

G. Hauck, *Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspektive* (ebenda Bd. 21, S. 81). 1876.

R. Staudigl, *Die axonometrische und schiefe Projektion.* Wien 1875.

C. Pelz, *Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie*, (Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Math.-phys. Klasse, Bd. 81, S. 300, Bd. 83, S. 375, Bd. 90, S. 1060). 1880—84.

J. Tesař, *Über den orthogonal-axonometrischen Verkürzungskreis* (ebenda Bd. 81, S. 453). 1880.

D. Tessari, *Projezioni assonometriche ortogonali ed oblique.* Torino 1882.

L. Berzolari, *Sull' assonometria ortogonale.* Pavia 1893.

A. Weiler, *Neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie.* Zweite Ausgabe. Leipzig 1896.

R. Schüßler, *Orthogonale Axonometrie.* Leipzig 1905.

Viertes Kapitel.

Grundlagen und Methoden der perspektivischen Darstellung.

Unendlich ferne Elemente.

54. Ein System von einander parallelen Linien, die zusammen den ganzen Raum erfüllen, heißt ein Parallelenbündel. Von den Linien eines Parallelenbündels sagt man, daß sie dieselbe Richtung haben. Aber wenn wir diese Ausdrucksweise gebrauchen, müssen wir wohl darauf achten, daß es sich hier nicht um die Bewegungsrichtung nach der einen oder anderen Seite auf der Linie handelt, sondern nur um die Stellung des Parallelenbündels im Raum.

Definition I. Ein unendlich ferner Punkt ist die durch ein Parallelenbündel bestimmte Richtung.

Ein unendlich ferner Punkt und ein gewöhnlicher (eigentlicher) Punkt sind sonach in Rücksicht auf ihre Veranschauungsmittel (das eine Mal eine Richtung, das andere Mal ein kleiner Körper) vollkommen verschiedene Dinge.

Von einer geraden Linie sagt man, daß sie einen unendlich fernen Punkt U enthält (nach ihm hinläuft), wenn sie die Richtung des Parallelenbündels hat, das U bestimmt.

Jede Linie im Raume enthält einen und nur einen unendlich fernen Punkt. Es gibt nämlich ein und nur ein Parallelenbündel, das die Linie enthält.

Zwei parallele Linien enthalten einen und denselben unendlich fernen Punkt, und wir sagen deshalb von ihnen in Übereinstimmung mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, daß sie sich in diesem unendlich fernen Punkt schneiden.

Von einer Ebene sagen wir, daß sie einen unendlich fernen Punkt U enthält, wenn sie eine Linie in der durch U bestimmten Richtung enthält. Indem wir diese Ausdrucksweise einführen, erreichen wir, daß wir als notwendige und hinreichende Bedingung,

daß eine Ebene einen Punkt enthält, immer fordern können, daß die Ebene eine Linie enthält, die durch den Punkt hindurchgeht. Jede Ebene enthält unendlich viele unendlich ferne Punkte, die durch die verschiedenen Richtungen der Linien in der Ebene bestimmt sind. Durch jeden dieser unendlich fernen Punkte gehen unendlich viele Linien der Ebene hindurch.

Definition II. Eine unendlich ferne Linie ist die Gesamtheit der unendlich fernen Punkte einer Ebene.

Hieraus folgt: Zwei parallele Ebenen enthalten eine und dieselbe unendlich ferne Linie. Denn zu jeder Linie in der Ebene findet man unendlich viele Linien von derselben Richtung in der anderen Ebene. Wir sagen von den Ebenen, daß sie sich in der unendlich fernen Linie schneiden.

Definition III. Die unendlich ferne Ebene ist die Gesamtheit aller unendlich fernen Punkte des Raumes.

Die unendlich ferne Ebene enthält sonach alle unendlich fernen Linien.

Die unendlich fernen Linien und Punkte samt der unendlich fernen Ebene heißen die unendlich fernen Elemente des Raumes.

55. Nachdem wir diese Definitionen aufgestellt und damit den aus der elementaren Geometrie bekannten Begriffen Punkt, Linie und Ebene eine weitere Ausdehnung gegeben haben, wollen wir untersuchen, welchen Einfluß diese Definitionen auf die Formulierung gewisser einleitender Sätze in der Geometrie haben.

1. Es gibt eine und nur eine gerade Linie, die durch zwei willkürlich gegebene Punkte A und B hindurchgeht.

Dieser Satz kann unter allen Umständen aufrechterhalten werden. Ist nämlich A ein eigentlicher und B ein unendlich ferner Punkt, so sagt der Satz aus, daß man durch A eine und nur eine Linie von bestimmter Richtung ziehen kann. Sind A und B unendlich fern, so kann man mit Hilfe einer Ebene, die zu den durch A und B bestimmten Richtungen parallel ist, eine unendlich ferne Linie bestimmen, die A und B enthält. Es gibt unendlich viele Ebenen, die den beiden Richtungen parallel sind, aber diese Ebenen sind untereinander parallel und bestimmen deshalb nur eine einzige unendlich ferne Linie.

2. Eine Ebene enthält jede Linie, die zwei Punkte A und B in ihr verbindet.

Zuerst setzen wir voraus, daß die Ebene nicht unendlich fern ist. Ist dann A ein eigentlicher und B ein unendlich ferner Punkt, den man nach dem Gesagten durch die Richtung einer gewissen Linie b in der Ebene bestimmen kann, so sagt der Satz

aus, daß eine Linie, die durch A geht und parallel zu b ist, in der Ebene liegt. Sind A und B unendlich fern, so ist der Satz eine Folge von der Definition der unendlich fernen Linie. Ist die Ebene unendlich fern, sind also auch A und B unendlich fern, so folgt der Satz aus der Definition III.

3. Es gibt eine und nur eine Ebene, die drei nicht einer geraden Linie angehörende Punkte A, B und C enthält. Um zu zeigen, daß dieser Satz allgemein gültig ist, müssen wir drei verschiedene Fälle untersuchen:

1. A und B sind eigentliche Punkte, C unendlich fern, dann bestimmen die Linien AB und AC die Ebene.

2. A ist ein eigentlicher Punkt, B und C sind unendlich fern, dann bestimmen wieder AB und AC die Ebene.

3. A, B und C sind alle unendlich fern, dann gibt es, da sie nicht auf einer unendlich fernen Geraden liegen sollen, keine eigentliche Ebene, die sie enthält, nur die unendlich ferne Ebene enthält sie alle. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Endlich können wir noch folgende Sätze aufstellen:

Zwei Linien in derselben Ebene haben immer einen Punkt gemeinsam, der ihr Schnittpunkt heißt.

Drei Ebenen, die nicht durch dieselbe Linie hindurchgehen, haben drei Schnittlinien, die durch denselben Punkt gehen.

Hieraus geht schon hervor, welche Vorteile man durch die Einführung der unendlich fernen Elemente erlangt. Die Spaltungen, die in gewissen geometrischen Untersuchungen dadurch entstehen, daß zwei Linien derselben Ebene entweder einander schneiden oder parallel sind, zwei Ebenen entweder einander schneiden oder parallel sind u. dgl., können nun vermieden werden. Die besonderen Betrachtungen, die man fortwährend über parallele Linien und Ebenen anstellen muß, wenn man die Ausdrucksweise der elementaren Geometrie beibehält, sind jetzt ein für allemal durchgeführt und die Resultate in unseren Definitionen und Sätzen über die unendlich fernen Elemente niedergelegt.

Die Gesamtheit aller geraden Linien, die durch einen und denselben Punkt hindurchgehen und eine bestimmte Kurve treffen, bildet eine Kegelfläche. Dagegen bilden die geraden Linien, die alle dieselbe Richtung haben und eine bestimmte Kurve treffen, eine Zylinderfläche; diese Linien enthalten aber alle denselben unendlich fernen Punkt, und somit ist die Zylinderfläche aufzufassen als eine Kegelfläche mit unendlich ferner Spitze.

56. Der Ausdruck unendlich ferner Punkt findet seine Erklärung durch folgende Betrachtung:

Wenn eine gerade Linie a von einem ihrer Punkte A derart durchlaufen wird, daß dieser sich mehr und mehr von irgendeinem festen Punkt O auf der Linie entfernt, so nähert sich die Verbindungslinie des beweglichen Punktes mit einem festen Punkt B außerhalb a mehr und mehr einer bestimmten Grenzlage, ohne sie jedoch jemals zu erreichen. Diese Grenzlage ist die Linie b, die durch B geht und zu a parallel ist. Den Winkel zwischen AB und b kann man so klein machen wie man will, indem man den Abstand OA genügend groß wählt. Nach dem Vorstehenden soll aber b als die Verbindungslinie von B mit einem uneigentlichen Punkt von a betrachtet werden, und da sie die Grenzlage für die Verbindungslinie von B mit einem Punkte A von a ist, dessen Abstand von O ins Unendliche wächst, erscheint es natürlich, den uneigentlichen Punkt einen unendlich fernen Punkt zu nennen.

Zentralprojektion.

57. Bei der Zentralprojektion wird ein Projektionszentrum O benutzt, das man als das Auge des Beschauers auffassen kann, und das nicht unendlich fern liegt, und eine Bildebene Π, die nicht durch O geht. Wir denken uns O vor der Bildebene und geben seine Lage im Raum durch seine senkrechte Projektion H auf Π (den *Hauptpunkt*) und den Abstand HO (die *Distanz*) an.

Ein beliebiger Punkt A, der von O verschieden ist, wird im Bilde dargestellt durch den Schnittpunkt A' der Linie OA (des *Projektionsstrahls*) mit der Bildebene. Mit Ausnahme des Punktes O hat jeder Punkt A ein bestimmtes Bild A'; insbesondere kann A' auch unendlich fern liegen. Alle Punkte des Raumes, deren Bilder unendlich fern liegen, gehören einer Frontebene (d. h. einer zu Π parallelen Ebene) durch O an. Diese Ebene heißt die *Verschwindungsebene*. Sie teilt den ganzen Raum in zwei Halbräume; der eine von diesen, der Π enthält, umfaßt alle Punkte mit *eigentlichen Bildern*, das heißt Punkte, deren Bild auf derselben Seite von O liegt wie der Punkt selbst, während der andere Halbraum die Punkte umfaßt, die durch O von ihren Bildern getrennt werden. Der letztgenannte Halbraum (der *Verschwindungsraum*) kommt bei der praktischen Anwendung nicht in Betracht, aber bei der Ausführung geometrischer Konstruktionen läßt es sich nicht umgehen, auch ihn heranzuziehen.

58. Ein Projektionsstrahl stellt sich als ein Punkt dar, nämlich die Spur des Strahles in Π. Eine gerade Linie a, die kein Projektionsstrahl ist, wird durch eine gerade Linie a' abgebildet, indem die

Projektionsstrahlen, die durch die Punkte von a gehen, eine Ebene durch O (die *projizierende Ebene* der Linie) erfüllen und diese die Bildebene in einer bestimmten Linie a' schneidet (die unendlich fern liegt, wenn a in der Verschwindungsebene enthalten ist).

Ist die Linie a nicht zu Π parallel, so läßt sie sich durch ihre Spur P und den Fluchtpunkt U', das heißt, das Bild des unendlich fernen Punktes U von a darstellen (Fig. 62). Die Linie a bezeichnen wir dann durch (P, U'). In der Figur sind die beiden Punkte P, U' angegeben und samt dem Hauptpunkte H und der Distanz d als bekannt angenommen. Das Bild der Linie ist PU' und ihre Lage im Raume ist dadurch bestimmt, daß sie durch P gehen und zu der Linie OU' parallel sein soll. Ihre Neigung gegen die Bildebene findet man sofort durch die Umklappung O_1U' von OU' (HO_1 wird gleich der Distanz gemacht und senkrecht zu $U'H$ gezogen). Das Stück PU' stellt den Teil der Linie dar, der hinter der Bildebene liegt, die Verlängerung dieser Strecke über P hinaus ist das Bild des endlichen Stückes der Linie zwischen der Bildebene und der Verschwindungsebene. Die Verlängerung über U' hinaus hingegen liefert den Teil der Linie, der im Verschwindungsraume liegt. Wenn die Linie ein Projektionsstrahl wird, fallen P und U' zusammen.

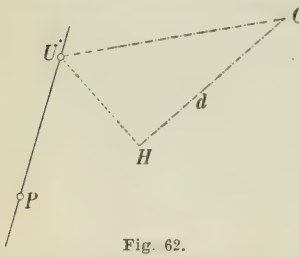


Fig. 62.

Parallele Linien haben denselben Fluchtpunkt, ihre Bilder laufen also in diesem Punkte zusammen. Von den Linien, die senkrecht zu Π sind, fällt der Fluchtpunkt nach H.

Einen Winkel zwischen zwei geraden Linien mit den Fluchtpunkten U', V' kann man sofort durch Umklappung von O um $U'V'$ bestimmen.

59. Eine Ebene Γ, die nicht zu Π parallel ist, wird durch ihre Spur p und die Fluchtlinie u', d. h. das Bild der unendlich fernen Linie der Ebene, dargestellt; u' ist sonach die Spur einer Ebene, die durch O zu Γ parallel gelegt ist, und wird deshalb parallel zu p. Wir bezeichnen die Ebene durch (p, u'). Die Lage der Ebene im Raume ist dadurch bestimmt, daß sie durch p geht und zu der Ebene Ou' parallel ist. Ihre Neigung gegen die Bildebene bestimmt sich deshalb durch das Profil $T'O_1$ der letztgenannten Ebene (Fig. 63, wobei $HT' \perp u'$, $HO_1 = d \perp HT'$). Der Streifen zwischen p und u' stellt den ganzen Teil der Ebene dar, der hinter Π liegt, während die Fortsetzung des Streifens über p

hinaus den Streifen der Ebene liefert, der zwischen der Bildebene und der Verschwindungsebene liegt. Endlich stellt die Fortsetzung des Streifens über u' hinaus den Teil der Ebene dar, der im Verschwindungsraume liegt.

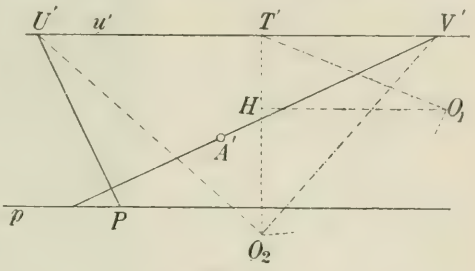


Fig. 63.

Wenn eine Linie in der Ebene liegen soll, so muß ihre Spur auf der Spur und ihr Fluchtpunkt auf der Fluchtlinie der Ebene liegen. Von den Querlinien der Ebene fällt der Fluchtpunkt nach T' (vergleiche Fig. 63). Die Frontlinien stellen sich parallel zur Spur dar.

Soll man durch den gegebenen Punkt A in der Ebene eine Linie senkrecht zu der in der Ebene gelegenen Linie (P, U') ziehen, so geschieht dieses, indem man den Fluchtpunkt V' der gesuchten Linie auf u' so bestimmt, daß der Winkel $U'OV'$ ein rechter wird. Man klappt zu dem Zweck O um u' in O_2 um $(T'O_2 = T'O_1 = T'O)$. Dann bestimmt $O_2V' \perp O_2U'$ den Punkt V'.

Ebenso kann man einen Winkel von beliebiger Größe darstellen. Man zeichnet auch z. B. leicht in einer Ebene ein Quadrat, von dem zwei Ecken gegeben sind, indem man außer den Winkeln des Quadrates auch den Winkel zwischen einer Diagonale und einer Seite benutzt.

Die Schnittlinie zweier Ebenen wird im allgemeinen dadurch bestimmt, daß ihre Spur und ihr Fluchtpunkt die Schnittpunkte der Spuren und Fluchtlinien der Ebenen sind. Den Winkel zwischen zwei Ebenen mit den Fluchtlinien u', v' bestimmt man, indem man den Winkel zwischen den Ebenen Ou' und Ov' sucht (14).

60. Zur vollständigen Festlegung eines Punktes A muß man außer dem Bilde A' des Punktes eine gerade Linie (P,U') zeichnen, die durch den Punkt geht. Man kann dann leicht eine neue Linie (Q,V') durch denselben Punkt finden, da die beiden Linien in derselben Ebene liegen müssen. $(PQ \parallel U'V')$.

Sind zwei Punkte A und B durch ihre Bilder und zwei Linien (P, U') und (Q, V'), auf denen sie liegen, gegeben, so kann man sofort das Bild der Verbindungslinien beider Punkte zeichnen, aber die Spur und den Fluchtpunkt dieser Linie hat man nicht unmittelbar. Man muß zunächst durch B eine Linie (M,U')

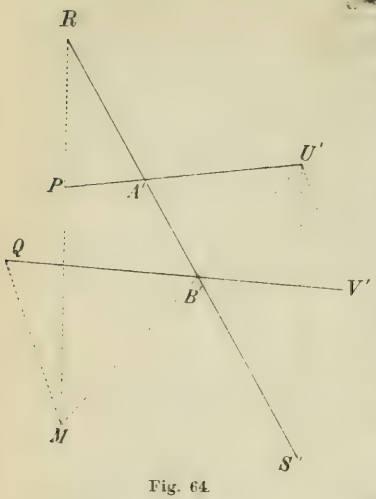


Fig. 64.

parallel (P,U') ziehen $(QM \parallel U'V')$ (Fig. 64). Darauf bestimmen die beiden Linien (P,U') und (M,U') eine Ebene mit der Spur PM, deren Fluchtlinie durch U' geht und zu PM parallel ist. Da diese Ebene die Linie AB enthält, geht ihre Spur durch die Spur R und ihre Fluchtlinie durch den Fluchtpunkt S' der Linie.

Eine Frontlinie läßt sich bestimmen durch ihr Bild und eine Ebene, in der sie liegt, oder einen Punkt, durch den sie geht. Eine Frontebene ist durch einen ihrer Punkte bestimmt.

61. Der Schnittpunkt A der Linie (P,U') mit der Ebene (p,u') (Fig. 65) wird durch eine Hilfsebene (q,v'), die durch die Linie geht, ermittelt. Eine Linie ist zu einer Ebene parallel, wenn ihr Fluchtpunkt auf die Fluchtlinie der Ebene fällt.

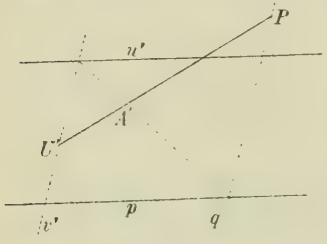


Fig. 65.

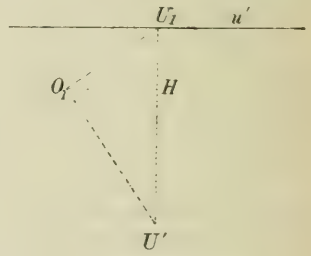


Fig. 66.

Die Bedingung dafür, daß eine Ebene mit der Fluchtlinie u' senkrecht zu einer Linie mit dem Fluchtpunkt U' ist (Fig. 66), findet man sofort daraus, daß die Linie OU' zu der Ebene Ou' senkrecht sein muß. HU' muß demnach zu u' senkrecht sein und es in einem solchen Punkte U_1 schneiden, daß der Winkel $U_1'OU'$ ein rechter wird. Dies kann man zur Konstruktion von U' benutzen, wenn u' bekannt ist, und umgekehrt.

62. Die wahre Länge einer beliebigen Strecke AB auf der Linie (P, U') findet man durch Parallelprojektion auf die Bildebene. Stellt man die Parallelprojektion so her, daß OU' sich in

wahrer Größe darstellt, so muß auch die Strecke AB, die ja zu OU' parallel ist, sich in ihrer wahren Größe darstellen. Man wählt deshalb als Fluchtpunkt der Projektionsstrahlen einen solchen Punkt S', daß $U'S' = U'O = U'O_1$ wird (Fig. 67). Die Parallelprojektion von AB fällt dann auf die durch P zu $U'S'$ gezogene Parallele, und das auf dieser Linie zwischen $S'A'$ und $S'B'$ liegende Stück A_1B_1 ist die gesuchte wahre Länge. Der Punkt S' heißt ein *Teilpunkt*. Wenn A und B dieselben Bilder haben, wendet man eine ganz ähnliche Parallelprojektion an, aber die Ausführung wird etwas anders, indem man zur näheren Bestimmung von A und B zwei verschiedene gerade Linien benutzen muß. Es ist in der Praxis oft unmöglich, den ganzen Abstand $U'O$ abzutragen, man wählt dann S' so, daß $U'S' = \frac{1}{n} U'O$, und die Parallelprojektion liefert dann auch $\frac{1}{n}$ von der gesuchten wahren Länge.

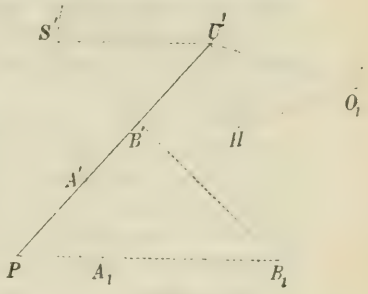


Fig. 67.

Soll man nur eine Teilung in einem gegebenen Verhältnisse ausführen, so ist es ganz gleichgültig, wie man S' wählt.

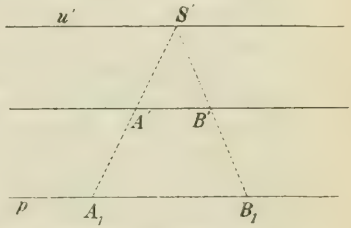


Fig. 68.

Liegt die Strecke AB auf einer Frontlinie, so stellt sie sich bei jeder Parallelprojektion auf die Bildebene in ihrer wahren Größe dar. Kennt man eine Ebene (p,u'), die die Linie enthält, so kann man den Fluchtpunkt S' auf der Fluchtlinie der Ebene annehmen und erhält dann die gesuchte Länge A_1B_1 auf der Spur der Ebene (vgl. Fig. 68).

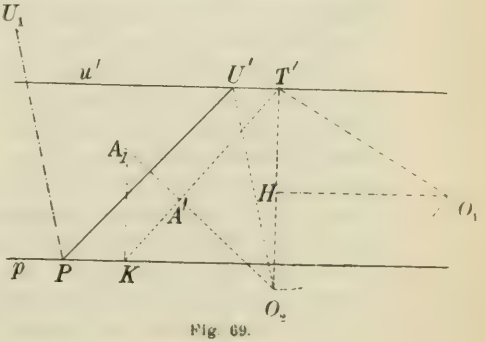


Fig. 69.

63. Die Umklappung einer Ebene führt man aus, indem man durch jeden Punkt der Ebene eine Querlinie zieht und diese umklappt. Durch den Punkt A (Fig. 69) ist so die Querlinie AT' gezogen,

die p in K schneidet, sie wird in das Lot von p mit dem Fußpunkt K umgeklappt, und es handelt sich nun bloß darum, auf dieser Linie die wahre Länge von KA abzutragen. Dies erreicht man unmittelbar mit Hilfe des Teilpunktes O_2 ($T'O_2 = T'O_1 = T'O$ wird auf $T'H$ abgetragen). Die Umklappung der Linie (P, U') ist PU_1 ($\parallel O_2 U'$).

64. Wenn die Zentralprojektion in der Praxis zur Veranschaulichung eines Gegenstandes verwendet wird, muß dieser zunächst so aufgestellt sein, daß kein Stück von ihm in den Verschwindungsraum fällt, aber dies allein reicht nicht hin. Wenn das Bild einigermaßen anschaulich wirken soll, auch für andere Stellungen des Auges, als für die es konstruiert ist, so hat die Erfahrung gezeigt, daß man die Regel festhalten muß, keinen von den benutzten Projektionsstrahlen mit der Bildebene einen Winkel unter etwa 70^0 bilden zu lassen. Aus diesem Grunde muß man in der Regel mit einer ziemlich großen Distanz arbeiten und deshalb die Konstruktionen, die von der Größe der Distanz abhängen, so ausführen, daß man mit einem bestimmten Bruchteil der Distanz an Stelle der ganzen Distanz operiert. Wir haben bereits angegeben, wie man das ausführen kann, wenn es sich um die wahre Länge einer geraden Strecke handelt.

Eine andere praktische Schwierigkeit ist die, daß die Fluchtpunkte für gewisse Richtungen außerhalb des Zeichenblattes fallen. Man muß dann Hilfskonstruktionen einführen.

Hinsichtlich des Ausziehens geometrischer Zeichnungen gilt die Regel, daß von zwei Punkten auf demselben Projektionsstrahl der sichtbar ist, der O am nächsten liegt. Die Bildebene betrachtet man als durchsichtig.

65. Bei der praktischen Konstruktion perspektivischer Bilder kommt es gewöhnlich darauf an, das Bild eines Gegenstandes zu konstruieren, der in doppelter Projektion auf eine horizontale und eine vertikale Ebene vorgelegt ist.

Die Bildebene Π stellt man dann so auf, daß sie vertikal ist, und wählt das Projektionszentrum in passender Weise. Man kann sich nun bisweilen dadurch helfen, daß man die Konstruktion des perspektivischen Bildes einfach in der doppelten Projektion ausführt, indem man die Projektionsstrahlen nach den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zieht und ihre Schnittpunkte mit Π sucht. Aus der doppelten Projektion führt man dann die so in Π gewonnene Figur entweder in wahrer Größe oder in entsprechender Vergrößerung in die Zeichenebene über.

Eine andere Methode besteht darin, daß man zuerst das per-

spektivische Bild von der Grundrißprojektion des Gegenstandes zeichnet und darauf die verschiedenen Punkte durch ihre Erhebung über die Grundrißebene festlegt, indem man die Aufrißebene als die Bildebene benutzt. In Fig. 70 ist so das perspektivische Bild eines rechteckigen Blocks gezeichnet, der auf der

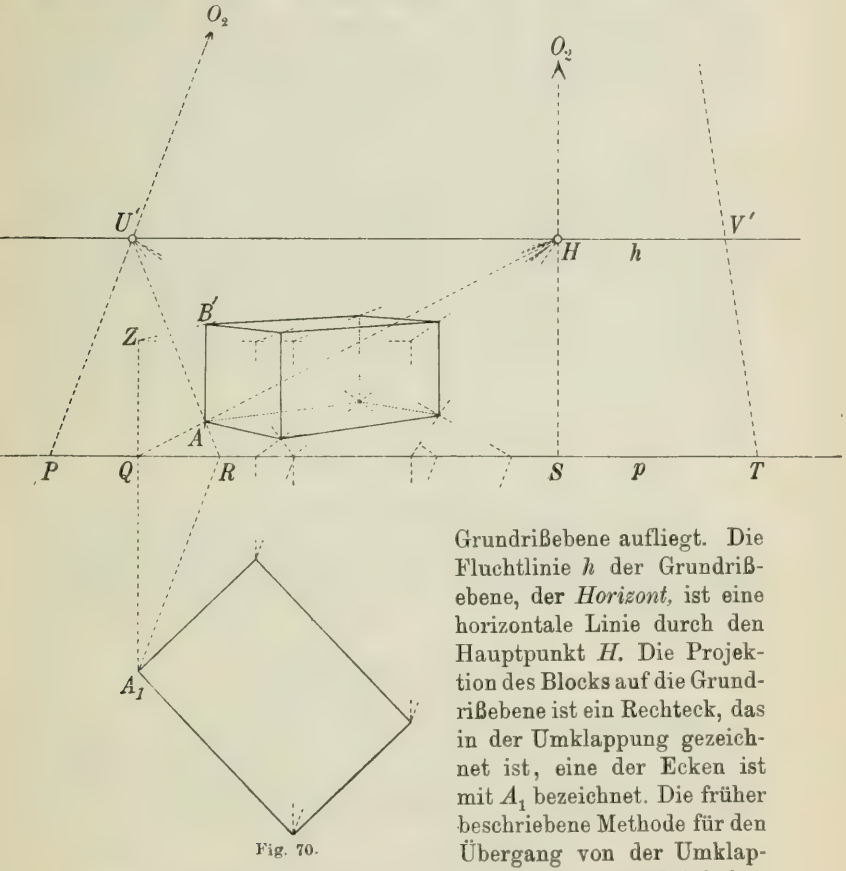


Fig. 70.

Grundrißebene aufliegt. Die Fluchtlinie h der Grundrißebene, der *Horizont*, ist eine horizontale Linie durch den Hauptpunkt H. Die Projektion des Blocks auf die Grundrißebene ist ein Rechteck, das in der Umklappung gezeichnet ist, eine der Ecken ist mit A_1 bezeichnet. Die früher beschriebene Methode für den Übergang von der Umklappung zum perspektivischen Bilde könnte man jetzt anwenden, indem man HO_2 gleich der Distanz senkrecht zu h abträgt und den gefundenen Punkt O_2 benutzt, wie früher angegeben wurde. Aber für sehr große Distanzen ziehen wir ein anderes Verfahren vor: Wir ziehen eine Linie (P, U') in der gegebenen Ebene so, daß PU' das Lot SH von h in einem

Punkte O_2 schneidet, der so weit entfernt liegt, daß die Distanz HO_2 für den vorliegenden Zweck geeignet ist. (Der genaue Wert der Distanz spielt meistens keine Rolle, und wir wollen es hier direkt vermeiden, ihn unmittelbar zu benutzen.) Um nun A_1 in das perspektivische Bild A' überzuführen, ziehen wir die Linien A_1Q senkrecht auf p und A_1R parallel zu PU'. Diese beiden Linien gehen über in QH und RU', wodurch A' sofort bestimmt ist. Hierauf machen wir die vertikale Strecke QZ gleich der vertikalen Kante AB des Blocks, die Linie ZH bestimmt dann den Punkt B'. Auf diese Weise zeichnen wir leicht das ganze Bild des Blocks.

Wenn es nur auf die ungefähre Lage des Hauptpunktes und die ungefähre Größe der Distanz innerhalb gewisser Grenzen ankommt, kann man die direkte Annahme von beiden vermeiden, indem man in der Grundrißebene zwei Linien (P,U') und (T,V'), die in der Figur angedeutet sind, so auswählt, daß der unzugängliche Schnittpunkt O_2 von PU' und TV' in einem Abstande von h liegt, der als Distanz geeignet ist, während die Projektion dieses Schnittpunktes auf h einen geeigneten Hauptpunkt liefert. Darauf zieht man durch A_1 die Parallelen zu PU' und TV' und führt diese Linie über in die Linien durch U' und V', wodurch A' bestimmt wird. Die Höhe AB trägt man ebenso wie früher ab, indem man an Stelle von H einen beliebigen geeigneten Punkt von h verwenden kann.

Die hier angegebene Methode ist von solcher Allgemeinheit, daß wir sie ohne Schwierigkeit auf den Fall überführen können, wo das Projektionszentrum sich ins unendlich Weite entfernt. Die Zentralprojektion geht dann in eine Parallelprojektion über.

Das Doppelverhältnis.

66. Unter dem Doppelverhältnis $(ABCD)$ für vier verschiedene eigentliche Punkte A, B, C und D auf einer geraden Linie versteht man das Verhältnis zwischen den beiden Verhältnissen, in die A und B die Strecke CD teilen; also:

$$(ABCD) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD};$$

das Vorzeichen der Abstände wird in der gewöhnlichen Weise bestimmt. Ist einer der Punkte unendlich fern, so wird $(ABCD)$ als der Grenzwert für $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$ definiert, wenn man in diesem Ausdruck den betreffenden Punkt durch einen veränderlichen Punkt

auf der Linie ersetzt, dessen Abstände von den anderen Punkten ins Unendliche wachsen. Der Grenzwert wird dann durch ein einfaches Verhältnis ausgedrückt; so erhält man, wenn A unendlich fern ist,

$$(ABCD) = \frac{BD}{BC}.$$

67. Sind A, B, C und D eigentliche Punkte, so kann man $(ABCD)$ durch ein einziges Verhältnis ausdrücken, indem man die beiden Verhältnisse $\frac{AC}{AD}$ und $\frac{BC}{BD}$ auf denselben Nenner OD bringt, wo O ein beliebiger eigentlicher Punkt außerhalb der geraden Linie ist (Fig. 71). Die Linien OA und OB mögen von einer Linie durch C, die zu OD parallel ist, in M und N geschnitten werden. Man findet dann, indem man MC und OD übereinstimmende positive Richtungen gibt,

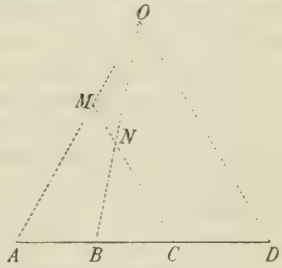


Fig. 71.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{MC}{OD} \text{ und } \frac{BC}{BD} = \frac{NC}{OD},$$

also

$$(ABCD) = \frac{MC}{NC}.$$

Bei Parallelprojektion bleiben die beiden Teilbrüche des Doppelverhältnisses und damit dieses selbst ungeändert. Aber auch bei einer allgemeinen Zentralprojektion bleibt der Wert des Doppelverhältnisses ungeändert. Dies beweist man folgendermaßen: A, B, C und D mögen aus O in A', B', C' und D' projiziert werden (Fig. 72). Drücken wir aber auf die angegebene Art die Doppelverhältnisse $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$ als einfache Verhältnisse aus, so wird:

$$\frac{MC}{NC} = \frac{M'C'}{N'C'},$$

und folglich

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

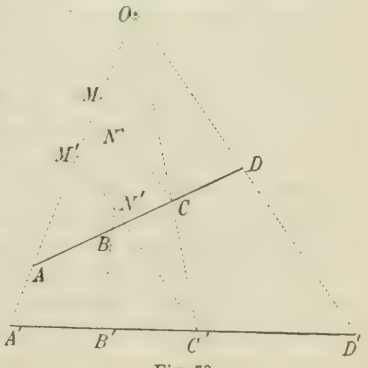


Fig. 72.

Fällt einer der projizierten Punkte, z. B. D', in unendliche Entfernung, so gilt der Satz auch. Dieses ist nämlich der Fall, wenn die gerade Linie, auf die man projiziert, dem Strahl OD parallel ist, also z. B. bei der Linie $M'C'$. Hier wird aber das Doppelverhältnis gleich $\frac{M'C'}{N'C'}$, und wir haben gezeigt, daß dies $= (ABCD)$ ist.

68. Liegen A, B, C und D auf einer unendlich fernen Linie, so wird das Doppelverhältnis $(ABCD)$ als das Doppelverhältnis $(A'B'C'D')$ von vier Punkten A', B', C' und D' definiert, die durch eine beliebige Zentralprojektion aus den gegebenen unendlich fernen Punkten entstehen. Daß der so bestimmte Wert unabhängig davon ist, welche Zentralprojektion man anwendet, sieht man aus dem soeben bewiesenen Satz. Man sieht auch leicht, daß dieser Satz bei der durch die Hinzunahme der unendlich fernen Punkte gegebenen Erweiterung der Definition der Doppelverhältnisse seine Gültigkeit behält.

69. *Wenn zwei Punktquadrupel A, B, C und D und A', B', C' und D' auf zwei verschiedenen Linien dasselbe Doppelverhältnis $(ABCD) = (A'B'C'D')$ haben und A auf A' fällt, so gehen die Verbindungslinien BB', CC' und DD' durch denselben Punkt.*

Denn projizieren wir die beiden geraden Linien auf eine andere Ebene derart, daß die Linien, in die sie übergehen, parallel sind, so werden die Abstandsverhältnisse $BC:BD$ und $B'C':B'D'$ einander gleich und die Verbindungslinien entsprechender Punkte laufen sonach durch einen Punkt, also müssen sie auch in der ursprünglichen Lage durch einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt hindurchgegangen sein.

Haben zwei Punktquadrupel A, B, C, D und A_1, B_1, C_1, D_1 dasselbe Doppelverhältnis $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$ und A, B und C fallen bzw. mit A_1, B_1 und C_1 zusammen, so fällt D auch mit D_1 zusammen. Denn verwandeln wir die Punkte durch Zentralprojektion derart, daß die Projektion von A unendlich fern wird, so werden die Abstandsverhältnisse der Projektionen B', C', D' und B_1', C_1', D_1' von B, C, D und B_1, C_1, D_1 einander gleich, und da B' auf B_1' und C' auf C_1' fällt, so fällt auch D' auf D_1'.

70. Wird $(ABCD) = -1$, so sagt man, die Punktepaare AB und CD *liegen harmonisch* (oder *sind harmonisch verbunden*). Liegen sie auf einer eigentlichen geraden Linie, und ist D unendlich fern, so liegt C in der Mitte zwischen A und B.

Zwei harmonische Punktepaare liefern bei einer beliebigen Zentralprojektion immer wieder zwei harmonische Punktepaare.

Unter zwei harmonischen Strahlenpaaren ab und cd versteht man zwei Linienpaare, die durch denselben Punkt S gehen, in derselben Ebene liegen und von einer geraden Linie in zwei harmonischen Punktepaaren geschnitten werden. Sind a, b, c gegeben, so konstruiert man d auf folgende Weise (Fig. 73): Eine Parallele zu a schneidet b und c in B und C. Man trage $BD = CB$ auf der Verlängerung von CB ab, dann geht d durch D. Die Konstruktion kann nicht angewendet werden, wenn der Schnittpunkt der Strahlen unendlich fern liegt. In diesem Falle schneide man die Strahlen durch eine beliebige gerade Linie und bestimme auf dieser den vierten harmonischen Punkt. Sind die Strahlen a und b des einen Paares aufeinander senkrecht, so halbieren sie die Winkel zwischen den Strahlen des anderen Paares. Dies geht unmittelbar aus unserer Konstruktion hervor.

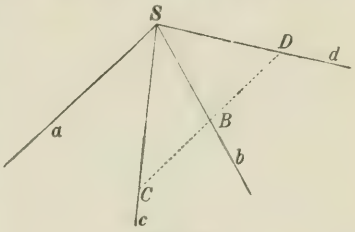


Fig. 73.

71. Ein *vollständiges Vierseit* ist eine ebene Figur, die aus vier geraden Linien (von denen keine drei durch denselben Punkt gehen) und ihren Schnittpunkten besteht (Fig. 74). Die vier Linien a, b, c und d heißen die *Seiten*, ihre sechs Schnittpunkte die *Ecken* des Vierseits. Die drei neuen Linien m, n, und p, durch die man je zwei einander gegenüberliegende Ecken verbinden kann, heißen die *Diagonalen* und ihre Schnittpunkte die *Diagonalpunkte* des Vierseits. Auf jeder Diagonale liegen zwei Ecken und zwei Diagonalpunkte. *Diese beiden Punktepaare sind harmonisch verbunden.*

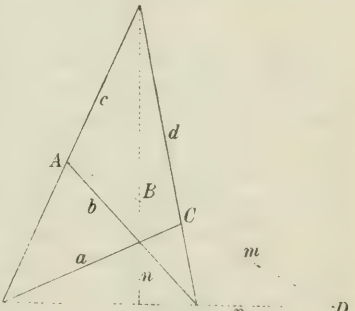


Fig. 74.

Wir wollen z. B. beweisen, daß die Punktepaare AC und BD auf m harmonisch verbunden sind. Die Figur $abcd$ betrachten wir zu dem Zweck als die Zentralprojektion eines Parallelogramms, wobei B und D die Projektionen des Mittelpunktes und des unendlich fernen Punktes derselben Diagonale werden; AC und BD sind dann die Projektionen von zwei harmonischen Punktepaaren und deshalb selbst harmonisch verbunden.

Ein *vollständiges Viereck* ist eine ebene Figur, die aus vier Punkten A, B, C und D (von denen keine drei auf derselben geraden Linie liegen) und den sechs Verbindungslinien je zweier dieser Punkte besteht (Fig. 75). Die Punkte heißen die *Ecken*, ihre Verbindungslinien die *Seiten* des Vierecks.

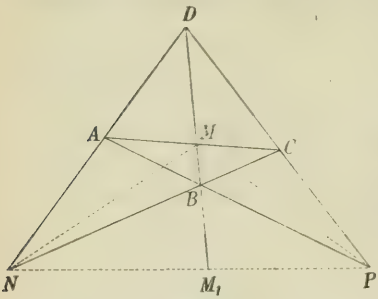


Fig. 75.

Die Seiten haben drei neue Schnittpunkte M, N und P, welche die *Diagonalpunkte* heißen. Ihre Verbindungslinien heißen *Diagonalen*. Durch jeden Diagonalpunkt gehen zwei Seiten und zwei Diagonalen. *Diese zwei Linienpaare sind harmonisch verbunden.*

Aus dem vorhergehenden Satze folgt nämlich, wenn man ihn auf das von den Linien AB, BC, CD und DA gebildete Vierseit anwendet, daß die Punktepaare BD und MM_1 harmonisch verbunden sind, also ist das Linienpaar PB und PD mit PM und PM_1 harmonisch verbunden, w. z. b. w.

Perspektive ebene Felder.

72. Zwei ebene Figuren (Felder) $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$, die in verschiedenen Ebenen Π und Π_1 liegen, heißen *perspektiv*, wenn sie durch Zentralprojektion aus einem Zentrum O, das in keiner der beiden Ebenen liegt, auseinander hervorgehen.

Jedem Punkt in der einen Ebene entspricht so ein Punkt in der anderen Ebene, und jedes Paar entsprechender Punkte AA_1, BB_1, CC_1, ... liegt auf einem Strahl durch O. Jeder geraden Linie in der einen Ebene entspricht eine gerade Linie der anderen Ebene, und die beiden Linien schneiden einander auf der Schnittlinie s der beiden Ebenen. Die Schnittlinie s entspricht sich selbst.

Zeichnet man eine Projektion der beiden Figuren aus einem beliebigen Zentrum, das in keiner der beiden Ebenen Π und Π_1 enthalten ist, so entstehen zwei neue Figuren $A'B'C'\ldots$ und $A_1'B_1'C_1'\ldots$ in der Zeichenebene (Fig. 76), die ganz ähnliche Eigenschaften aufweisen wie die ursprünglichen Figuren: jedes Paar entsprechender Punkte $A'A_1'$, $B'B_1'$, $C'C_1'\ldots$ liegt auf einem Strahl durch O', und je zwei entsprechende Geraden schneiden einander auf s'.

Dies veranlaßt uns zur Aufstellung folgender Definition:

Zwei Figuren derselben Ebene heißen perspektiv (oder homolog), wenn 1. jedem Punkte der einen Figur ein bestimmter Punkt der anderen Figur entspricht, so daß jedes Paar entsprechender Punkte auf einem Strahl durch einen festen Punkt, das Zentrum, liegt, und 2. jeder bestimmten geraden Linie der einen Figur eine bestimmte gerade Linie der anderen Figur entspricht.

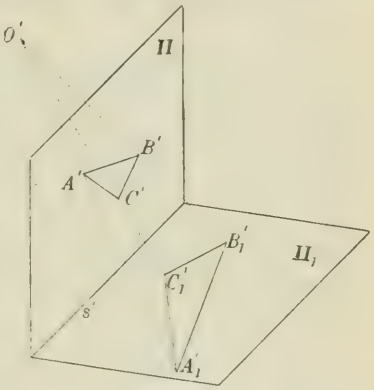


Fig. 76.

Es läßt sich dann, wie wir sofort zeigen werden, aus diesen beiden Bedingungen ableiten, daß je zwei verschiedene einander entsprechende Geraden der beiden Figuren sich auf einer festen geraden Linie schneiden müssen.

73. Wir wollen zunächst beweisen, daß zwei homologe ebene Figuren existieren, in denen drei beliebige in der Zeichenebene gegebene Punktepaare AA_1, BB_1 und CC_1 aus zugeordneten Punkten bestehen, wenn nur die drei Punktepaare auf geraden Linien liegen, die durch denselben Punkt O gehen; dabei dürfen doch weder die Punkte A, B, C noch die Punkte A_1, B_1, C_1 in eine gerade Linie fallen, und es darf keiner der Punkte nach O fallen (vgl. Fig. 77).

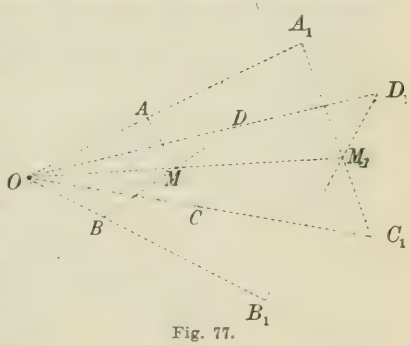


Fig. 77.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Anschauung der gegebenen Figur, indem wir diese Figur als Projektion einer räumlichen Figur auffassen: Die Geraden OAA_1, OBB_1, OCC_1 betrachten wir als Projektionen von drei Geraden im Raume, die durch einen Punkt W gehen, aber nicht in derselben Ebene liegen; die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind dann Projektionen von zwei Dreiecken, deren Spitzen auf den genannten drei Geraden liegen, und welche in zwei Ebenen Π und Π_1 gelegen sind. Durch Zentralprojektion aus dem Punkte

W können nun zwei perspektive Figuren in den beiden Ebenen Π und Π_1 bestimmt werden, und es leuchtet ein, daß diese Figuren in der Projektion auf der Zeichenebene zwei Figuren in dieser Ebene erzeugen werden, welche genau die vorgeschriebenen Eigenschaften haben.

Die bei dem Beweise benutzten räumlichen Figuren könnten indessen auf mannigfache Weise gewählt werden, und wir müssen daher zeigen, daß die Zuordnung der beiden homologen Figuren $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ in der Ebene eindeutig bestimmt ist. Wählen wir in der Figur ABC einen Punkt D, und schneiden DB und AC einander in M, so ist der dem Punkte M entsprechende Punkt M_1 bestimmt als der Schnittpunkt von OM und A_1C_1. BM entspricht nun B_1M_1, und der dem Punkte D entsprechende Punkt D_1 wird deshalb als Schnittpunkt von OD und B_1M_1 gefunden.

Die angegebene Konstruktion kann unbrauchbar werden, wenn eine der Seiten des Dreiecks ABC durch O geht. Aber in diesem Fall kann man durch D eine Hilfslinie ziehen, welche die beiden anderen Seiten des Dreiecks in zwei verschiedenen Punkten schneidet und nicht durch O geht. Die dieser Linie entsprechende Linie bestimmt dann D.

Da so einem beliebigen Punkt D der einen Figur nach den gegebenen Bedingungen immer nur ein Punkt der anderen Figur entsprechen kann, ist die Verknüpfung der beiden Figuren (die als *perspektivische Kollineation* oder *Perspektivität* bezeichnet wird) eindeutig bestimmt.

Da die beiden Figuren $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$, wenn sie nicht ganz zusammenfallen, durch Projektion zweier perspektiven Figuren in verschiedenen Ebenen Π und Π_1 erzeugt werden können, müssen entsprechende Linien sich auf einer bestimmten Geraden, der *Kollineationsachse* oder *Perspektivitätsachse*, schneiden. Jeder Punkt der Kollineationsachse entspricht sich selbst. Dasselbe gilt vom Zentrum (*Kollineationszentrum*) O.

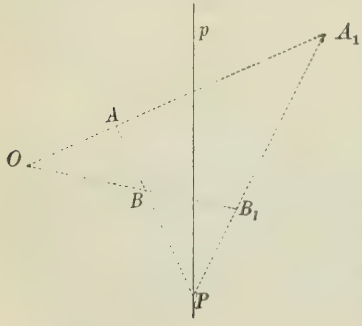


Fig. 78.

Die Kollineation ist auch vollständig bestimmt durch das Zentrum O, die Kollineationsachse p und ein Paar entsprechender Punkte A und A_1, von denen keiner nach O oder auf p fallen darf (Fig. 78).

Man findet dann zu einem beliebigen anderen Punkt B, der nicht in der Geraden OA enthalten ist, den entsprechenden Punkt B_1, indem man AB mit p in P schneidet und P mit A_1 verbindet. Aus dieser Verbindungslinie schneidet der Strahl OB den Punkt B_1 aus.

Aus dieser Konstruktion geht hervor, daß kein außerhalb O und p gelegener Punkt sich selbst entsprechen kann, es müßte denn die Kollineation sich auf die Identität reduzieren.

74. Die Kollineation kann auch durch drei Paare entsprechender Linien a und a_1, b und b_1, c und c_1 bestimmt werden, deren drei Schnittpunkte auf einer geraden Linie p liegen. (Dabei dürfen jedoch weder die Linien a, b, c noch die Linien a_1, b_1, c_1 durch einen Punkt gehen, und keine der Geraden darf mit p zusammenfallen.) Die Kollineation ist nämlich sofort bestimmt, wenn man p als Kollineationsachse annimmt und den Schnittpunkten von a mit b und c die Schnittpunkte von a_1 mit b_1 und c_1 entsprechen läßt.

Aus diesen Überlegungen und aus 73 folgt nun auch die Gültigkeit des *Desarguesschen Satzes: Lassen sich zwei Dreiecke einander so zuordnen, daß entsprechende Seiten sich in drei Punkten einer Geraden schneiden, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch denselben Punkt, und umgekehrt.*

75. Ist die Kollineationsachse unendlich fern, so sind irgend zwei einander entsprechende Geraden zueinander parallel. Die Figuren sind demnach ähnlich und ähnlich liegend. Ist auch das Zentrum unendlich fern, so sind die Figuren kongruent und können auseinander durch Parallelverschiebung erzeugt werden.

Ist das Zentrum unendlich fern, die Kollineationsachse aber nicht, so haben wir es mit perspektivisch affinen (parallelperspektiven) Figuren zu tun. Diesen Fall haben wir früher untersucht. Die unendlich ferne Gerade wird auch hier sich selbst entsprechen.

In allen anderen Fällen entspricht der unendlich fernen Geraden u der einen Figur eine eigentliche Gerade u_1 der anderen Figur, welche notwendigerweise der Kollineationsachse p parallel ist. Rechnen wir die unendlich ferne Linie aber zu der anderen Figur, so entspricht ihr eine neue zu p parallele Linie v. u_1 und v heißen die *Fluchtlinien* der Kollineation.

Aus O, p, A und A_1 kann man die Fluchtlinien folgendermaßen konstruieren (Fig. 79): Man zeichnet ein Paar entsprechender Linien a und a_1, indem man A und A_1 mit einem beliebigen Punkt von p verbindet. Der unendlich ferne Punkt U von a entspricht dem Schnittpunkt U_1 von a_1 mit der Parallelen durch O zu a. Die Fluchtlinie u_1 ist dann die Parallele durch U_1

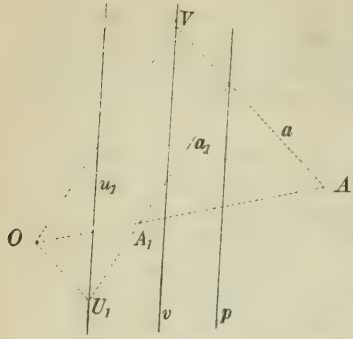


Fig. 79.

zu p. Ebenso entspricht der unendlich ferne Punkt V_1 von a_1 dem Schnittpunkt V von a mit der Parallelen durch O zu a_1 und die Fluchtlinie v ist die Parallele durch V zu p. Aus der Konstruktion geht hervor, daß *der Abstand des Zentrums von der einen Fluchtlinie gleich ist dem Abstand der Kollineationsachse von der anderen (mit entgegengesetztem Vorzeichen).*

Aus der Konstruktion ergibt sich zugleich, wie die Kollineation durch O, p und eine der Fluchtlinien, u_1 oder v, bestimmt werden kann.

76. Das Doppelverhältnis, das zwei verschiedene entsprechende Punkte zusammen mit dem Zentrum O und dem Schnittpunkte von p mit der durch O und die beiden Punkte gehenden Geraden bilden, ist für alle Paare entsprechender Punkte dasselbe. Man geht nämlich von einem Paar entsprechender Punkte A, A_1 zu einem anderen Paar B, B_1 durch Projektion aus einem Punkte von p über (Fig. 78), und hierbei bleibt das genannte Doppelverhältnis ungeändert. Durch dieses konstante Doppelverhältnis, zusammen mit dem Zentrum O und der Achse p kann die Kollineation ebenfalls bestimmt werden; doch muß dabei vorausgesetzt werden, daß O nicht auf p fällt.

Ist das Doppelverhältnis gleich -1, so sind irgend zwei entsprechende Punkte mit dem Zentrum O und dem Punkte auf der Kollineationsachse p harmonisch verbunden. Die Kollineation heißt dann *harmonisch* oder *involutorisch*.

77. Die Anwendung der ebenen Perspektivität beruht auf dem wichtigen Satz: *Zwei perspektive Figuren in verschiedenen Ebenen gehen durch Projektion auf eine dritte Ebene immer wieder in perspektive Figuren über.* Das Projektionszentrum darf dabei nur keiner der Ebenen angehören. Der Satz ergibt sich als unmittelbare Folge der Definition perspektiver Figuren.

Fassen wir z. B. die in Fig. 50 dargestellte Pyramide ins Auge. Die Grundfläche $ABCD$ der Pyramide und der ebene Schnitt $A^sB^sC^sD^s$ bilden zwei perspektive Figuren in verschiedenen Ebenen. Das Projektionszentrum ist dabei die Spitze S der Pyramide, und die Schnittlinie der beiden Ebenen ist p. Die axonometrischen Bilder $A_1B_1C_1D_1$ und $A_1{}^sB_1{}^sC_1{}^sD_1{}^s$ der beiden

Figuren müssen demnach in der Zeichenebene eine Perspektivität bilden, deren Achse das Bild p_1 von p ist, während ihr Zentrum nach S_1 fällt. Da nun weiter die unendlich ferne Linie u, welche der Figur $ABCD$ angehört, bei der räumlichen Perspektivität in die Gerade u^s der Figur $A^sB^sC^sD^s$ übergeht, und da diese beiden Geraden u und u^s durch die axonometrische Abbildung in eine unendlich ferne Gerade u_1 und eine eigentliche Gerade u_1^s übergeführt werden, so muß u_1^s eine Fluchtlinie der ebenen Perspektivität darstellen. Die ganze Konstruktion der Schnittfigur $A_1^sB_1^sC_1^sD_1^s$ läßt sich also auf die Konstruktion der zu $A_1B_1C_1D_1$ homologen Figur in der durch S_1, p_1, u_1^s bestimmten ebenen Perspektivität zurückführen.

78. Als zweites Beispiel nehmen wir *die Konstruktion der Umlegung einer ebenen Figur in die Zeichenebene.*

Die umgelegte Figur und die ursprüngliche Figur sind im Raume parallelperspektive Figuren (44,6). Ihre Projektionen auf die Zeichenebene müssen deshalb auch perspektiv sein, d. h. die umgelegte Figur und die Projektion der ursprünglichen Figur sind perspektiv.

Betrachten wir genauer z. B. die Darstellung in Zentralprojektion (Fig. 69). Die Figur $ABC\ldots$ der gegebenen Ebene (p,u') und ihre Umlegung $A_1B_1C_1\ldots$ sind im Raum perspektiv für ein unendlich fernes Zentrum, das durch die Richtung OO_2 dargestellt ist. Die Figuren $A'B'C'\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ werden demnach perspektiv für das Zentrum O_2 und die Perspektivitätsachse p. Bei der räumlichen Perspektivität werden die unendlich fernen Geraden der beiden Ebenen ineinander übergeführt. Bei der ebenen Perspektivität wird somit u' eine Fluchtlinie darstellen, und die ebene Perspektivität ist nunmehr durch das Zentrum O_2, die Perspektivitätsachse p und die Fluchtlinie u' der Figur $A'B'C'\ldots$ vollkommen bestimmt und kann hiernach zur Konstruktion der Figur $A_1B_1C_1\ldots$ verwendet werden.

Die andere Fluchtlinie wird nach der früher angegebenen Regel bestimmt (75).

79. Wir betrachten noch *die Umlegung eines ebenen Schnittes einer Pyramide* $S - ABCD$, die in doppelter Projektion dargestellt ist (Fig. 80). Die Umlegung in die Grundrißebene soll vorgenommen werden, ohne zuerst den Schnitt selbst zu zeichnen. Die Schnittebene ist durch die Spuren e_1 und e_2 dargestellt.

Zunächst ziehen wir durch S eine Frontlinie; ihre Grundrißspur sei H. Eine Ebene durch $S \parallel (e_1e_2)$ hat die Grundrißspur u', die durch H geht und $\parallel e_1$ ist. Durch Umlegung dieser Ebene um u'

wird der Punkt S nach O gelangen ($S'O \perp u'$, $HO = S''H''$); diese Umlegung wird somit durch Parallelprojektion in die Richtung SO erhalten werden können, und die Umlegung der gegebenen Ebene kann dann auch durch Parallelprojektion in die Richtung hergestellt werden. Da nunmehr die Grundfläche $ABCD$ aus dem

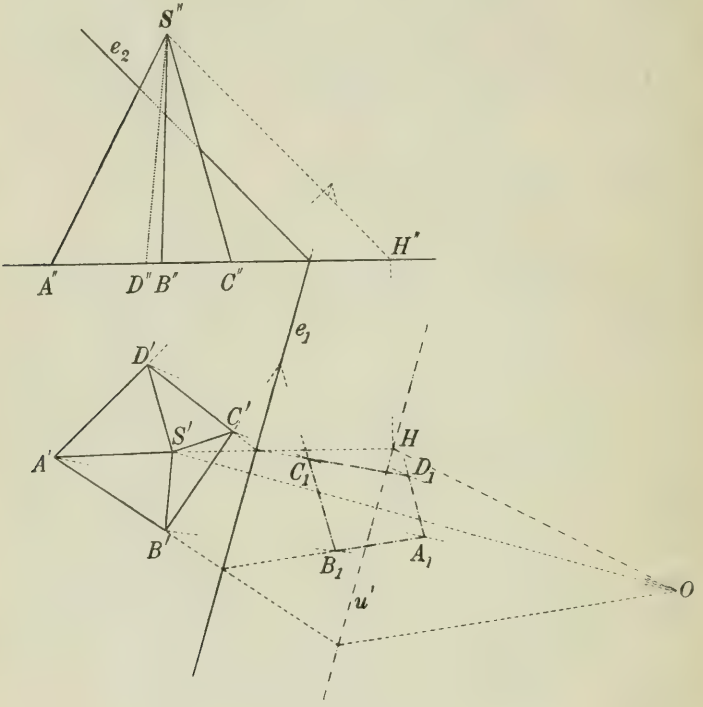


Fig. 80.

Schnitt der Pyramide mit der Ebene durch Zentralprojektion aus S abgeleitet werden kann, folgert man, daß $A'B'C'D'$ und die Umlegung $A_1B_1C_1D_1$ des Schnittes eine ebene Perspektivität bilden, deren Zentrum nach O fällt und deren Achse e_1 ist. Weiter ersieht man, daß der Geraden u' der Figur $A'B'C'D'$ bei der Zentralprojektion aus S die unendlich ferne Gerade der Schnittebene entspricht, und in der umgelegten Figur wird diese Gerade wiederum unendlich fern, also ist u' eine Fluchtlinie der ebenen Perspektivität, die der Figur $A'B'C'D'$ angehört. Die umgelegte

Figur kann nun, ohne andere räumliche Betrachtungen hineinzuziehen, gezeichnet werden.

Was den ebenen Schnitt selbst anbetrifft, so sei nur beiläufig darauf hingewiesen, daß der Grundriß des Schnittes aus der Grundfläche der Pyramide hergeleitet werden kann durch eine ebene Perspektivität, für welche das Zentrum nach S' fällt, die Achse nach e_1, und eine Fluchtlinie (die zu der Figur $A'B'C'D'$ zu rechnen ist) nach u'.

Perspektive Raumfiguren.

80. *Zwei Raumfiguren heißen zueinander perspektiv, wenn 1. jedem Punkt A der ersten Figur ein bestimmter Punkt A_1 der anderen Figur entspricht, derart, daß A, A_1 mit einem festen Punkt O, dem Perspektivitätszentrum, in einer Geraden liegen, und 2. jeder geraden Linie der einen Figur eine bestimmte gerade Linie der anderen Figur zugeordnet ist.* Die Beziehung zwischen den beiden Figuren wird deshalb als eine Kollineation, genauer als eine *perspektivische Kollineation* bezeichnet.

Einen besonderen Fall solcher Figuren bilden ähnliche und ähnlich liegende Figuren.

Aus der Definition lassen sich sofort folgende allgemeinen Eigenschaften perspektiver Figuren ableiten:

1. *Jede Linie durch O entspricht sich selbst.* Jedem Punkt der Linie entspricht nämlich wieder ein Punkt, der auf ihr liegt.

2. *Das Zentrum O entspricht sich selbst.* Denn jede Linie durch O entspricht sich selbst.

3. *Jede Ebene durch O entspricht sich selbst. Entsprechende Figuren in einer solchen Ebene sind perspektiv* (72).

4. *Jeder Ebene entspricht wieder eine Ebene.* Zwei einander schneidenden Linien entsprechen nämlich wieder zwei einander schneidende Linien.

5. Einer geraden Linie a, die nicht durch O geht, entspricht eine gerade Linie a_1, die ebenfalls nicht durch O geht.

Da die Linien, die durch O gehen und a treffen, auch a_1 treffen müssen, liegen a und a_1 in einer Ebene durch O. Sind a und a_1 verschieden, so muß ihr Schnittpunkt sich selbst entsprechen. Also muß es außer O noch unendlich viele Punkte geben, die sich selbst entsprechen. Auf jeder geraden Linie, welche nicht durch O geht, liegt mindestens einer von diesen. Die Gesamtheit aller solchen Punkte kann also nicht auf einer geraden Linie liegen, und es gibt sicher drei nicht einer Geraden angehörende Punkte M, N, P, die sich selbst entsprechen.

Von den drei Geraden MN, NP, PM gibt es nun wenigstens zwei, die nicht durch O gehen, und alle Punkte dieser beiden Geraden müssen sich selbst entsprechen, es fällt somit jeder Punkt der Ebene MNP mit seinem entsprechenden Punkt zusammen. Außer dieser Ebene und dem Punkt O kann es aber keinen Punkt geben, der mit seinem entsprechenden zusammenfällt, denn sonst müßten alle Punkte jeder Ebene, die durch diesen Punkt und O hindurchgeht, sich selbst entsprechen. Wenn wir die Identität ausschließen, können wir also sagen:

6. *Es gibt immer eine Ebene* Γ, *deren Punkte mit ihren entsprechenden Punkten zusammenfallen, und außerhalb dieser Ebene kann es nur noch einen solchen Punkt, das Zentrum, geben.* Die Ebene Γ heißt die *Kollineationsebene.*

7. *Die Schnittpunkte entsprechender Linien und die Schnittlinien entsprechender Ebenen liegen in der Kollineationsebene.*

8. Wenn die unendlich ferne Ebene nicht sich selbst entspricht, müssen zwei eigentliche Ebenen Φ_1 und Ψ existieren, die der unendlich fernen Ebene entsprechen, je nachdem man diese zu der ersten oder zu der zweiten Figur rechnet. Φ_1 und Ψ sind der Kollineationsebene parallel und heißen die *Fluchtebenen* der Kollineation. Der Abstand des Zentrums von der einen ist gleich dem Abstand der Kollineationsebene von der anderen. Dies läßt sich aus den entsprechenden Sätzen für die ebene Kollineation sofort ableiten. Ist die Kollineationsebene unendlich fern, aber das Zentrum nicht, so werden die Raumfiguren ähnlich und das Zentrum das Ähnlichkeitszentrum. Ist das Zentrum auch unendlich fern, so entstehen die Figuren auseinander durch Parallelverschiebung.

81. Wir wollen nun beweisen, daß wir eine räumliche perspektivische Kollineation oder, wie wir kürzer sagen wollen, eine *Raumperspektive* bestimmen können durch das Kollineationszentrum O, die Kollineationsebene Γ und irgend zwei einander entsprechende Punkte A und A_1, die wir auf einem Strahl durch O annehmen, jedoch so, daß keiner von ihnen weder nach O noch in Γ fällt. Wir betrachten zunächst den Fall, wo O nicht in Γ fällt, und denken uns zu einem beliebigen Punkt B den entsprechenden Punkt B_1 dadurch bestimmt, daß $(OKBB_1) = (OHAA_1)$, wobei K und H die Schnittpunkte von OB und OA mit der Ebene Γ bedeuten. Es leuchtet ein, daß die so hergestellte Beziehung im Raume eine perspektivische Kollineation ist. Es gibt also jedenfalls eine Raumperspektive, welche den gegebenen Bedingungen entspricht; daß es aber auch nur eine gibt, wird aus der Eindeutigkeit der folgenden Konstruktion hervorgehen, die für jede

den gegebenen Bedingungen entsprechende Raumperspektive gelten muß: Um zu einem Punkte B, der nicht auf AA_1 liegt, den entsprechenden zu finden, haben wir A und B zu verbinden und durch den Schnittpunkt S ihrer Verbindungslinie mit der Kollineationsebene die Verbindungslinie mit A_1 zu ziehen, diese wird von dem Strahl OB in dem gesuchten Punkt B_1 geschnitten. Es gibt also eine und nur eine Raumperspektive, die auf die angegebene Weise festgelegt wird.

Ist das konstante Doppelverhältnis $(OHAA_1) = -1$, so heißt die Raumperspektive eine *harmonische* (involutorische).

Der Fall, wo O in Γ liegt, kann durch eine Raumperspektive auf den Spezialfall zurückgeführt werden, wo O und Γ beide unendlich fern sind, in diesem Falle entstehen die Figuren auseinander durch Parallelverschiebung. Die Existenz der Raumperspektive ist somit auch in diesem Sonderfall erwiesen.

82. *Wenn zwei perspektive Raumfiguren so auf eine Ebene projiziert werden, daß die Kollineationsebene eine projizierende Ebene ist, entsprechen die Projektionen einander in einer ebenen perspektivischen Kollineation, deren Kollineationsachse und Kollineationszentrum durch die Projektion aus der Kollineationsebene und dem Kollineationszentrum der räumlichen Kollineation hervorgehen.*

In Fig. 81 bedeuten A und A_1 zwei entsprechende Punkte in der Raumperspektive. Ihre Projektionen (in der Figur ist eine Parallelprojektion benutzt) auf die in der Figur angedeutete Projektionsebene sind A' und A_1'. O und Γ werden in O' und Γ' projiziert. AA', A_1A_1' und OO' gehen durch denselben Punkt von Γ (der in der Figur unendlich fern liegt). Wir wollen nun beweisen, daß A' und A_1' durch eine ebene Perspektivität verknüpft sind. Liegt A' fest, kann A sich auf dem Projektionsstrahl AA' bewegen; A_1 bewegt sich dann auf dem Projektionsstrahl A_1A_1', also liegt auch A_1' fest. Weiter liegen A' und A_1' auf einem Strahl durch den festen Punkt O'. Beschreibt A' in der Projektionsebene eine gerade Linie a', so wird der geometrische Ort für A die zu a' gehörende projizierende Ebene, A_1 liegt also in der entsprechenden Ebene, die auch eine projizierende Ebene

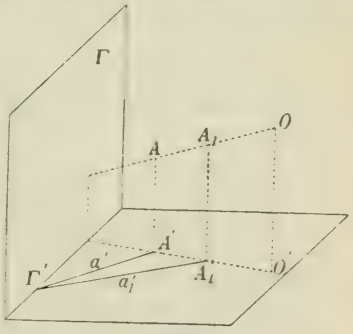


Fig. 81.

wird. Mithin durchläuft A_1' eine bestimmte gerade Linie a_1'. Die Bedingungen dafür, daß A' und A_1' durch eine perspektive Kollineation verknüpft sind, sind also in der Tat erfüllt.

Soll man zwei perspektive Raumfiguren in Grund- und Aufriß darstellen, so kann man die Kollineationsebene Γ senkrecht zur trennenden Achse wählen. Da Γ dann eine projizierende Ebene sowohl für die Grundriß- wie für die Aufrißprojektion wird, kann jede dieser Projektionen durch Anwendung einer ebenen Perspektivität konstruiert werden.

Die Raumperspektive findet überall da Anwendung, wo eine Raumfigur durch eine andere Raumfigur dargestellt werden soll. Dies ist z. B. bei den Reliefs der Fall, und man bezeichnet deshalb die Raumperspektive auch als *Reliefperspektive*. Ebenso muß die Szene eines Theaters so eingerichtet werden, daß ihre wirkliche Form ein perspektivisches Bild des Raumes ist, der dargestellt werden soll.

83. Von besonderem Interesse ist der Grenzfall der Raumperspektive, den man erhält, indem man das Kollineationszentrum sich ins Unendliche entfernen läßt. Man erhält dann eine Beziehung zwischen zwei räumlichen Figuren, die man als perspektivische Affinität bezeichnet. Sie hat folgende charakteristische Eigenschaften:

1. Jedem Punkt der einen Figur entspricht ein bestimmter Punkt der anderen Figur, und zwar jedem eigentlichen Punkte wieder ein eigentlicher Punkt.

2. Einer geraden Linie entspricht wieder eine gerade Linie.

3. Parallelen Linien entsprechen wieder parallele Linien.

4. Jeder Ebene entspricht wieder eine Ebene, und parallelen Ebenen entsprechen wieder parallele Ebenen.

5. Entsprechende gerade Linien und entsprechende Ebenen schneiden sich in einer bestimmten festen Ebene, der *Affinitätsebene*.

6. Die Verbindungsstrecke entsprechender Punkte hat konstante Richtung und wird von der Affinitätsebene in konstantem Verhältnis geteilt.

Man hat bei diesem Satz den Ausnahmefall zu beachten, wo die Verbindungsstrecke entsprechender Punkte der Affinitätsebene parallel wird. Dann wird die Entfernung der beiden einander entsprechenden Punkte ihrem Abstand von der Affinitätsebene proportional. Dies ergibt sich aus dem folgenden Satz, der den genannten Ausnahmefall in sich begreift:

7. Sind A, A_1 und B, B_1 zwei Paare entsprechender Punkte und werden durch zwei Parallele durch A und B die Punkte A_0,

B_0 auf der Affinitätsebene ausgeschnitten, so sind auch $A_1 A_0$ und $B_1 B_0$ einander parallel, und $A A_1 A_0$ und $B B_1 B_0$ bilden zwei ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke. (Der analoge Satz für die Ebene ist sofort ersichtlich.)

Von Spezialwerken über Perspektive seien hervorgehoben:

G. Ubaldo, *Perspectivae libri sex.* Pisauri 1600.

G. Desargues, *Méthode universelle de mettre en perspective les objects donnés réellement.* Paris 1636. *Oeuvres* de Desargues. Paris 1876.

A. Bosse, *Traité des pratiques géométrales et perspectives.* Paris 1665.

Br. Taylor, *New principles of linear perspective.* London 1719.

J. H. Lambert, *Freye Perspektive oder Anweisung, jeden perspektivischen Aufriß von freyen Stücken ohne Grundriß zu verfertigen.* Zürich 1744 und 1759.

B. E. Cousinery, *Géométrie perspective ou principes de projection polaire.* Paris 1828.

G. Schreiber, *Malerische Perspektive.* Karlsruhe 1854 u. ö.

J. M. de la Gournerie, *Traité de perspective linéaire.* Paris 1859 u. ö. (hier auch besonders die Theaterperspektive).

G. A. V. Peschka und E. Koutny, *Freie Perspektive in ihrer Begründung und Anwendung.* Hannover 1868.

J. J. Pillet. *Traité de perspective linéaire.* 3. Aufl., Paris 1901.

Von einem besonderen Gesichtspunkt geht aus:

G. Hauck, *Die subjektive Perspektive.* Stuttgart 1879.

Recht elementar und mehr für Künstler bestimmt sind:

G. Hauck, *Malerische Perspektive und Schattenkonstruktionen.* Berlin 1910.

F. Meisel, *Lehrbuch der Perspektive.* Leipzig 1908.

Über die geschichtliche Entwicklung vgl. M. Poudra, *Histoire de la perspective ancienne et moderne.* Paris 1864.

Die Reliefperspektive behandeln:

J. B. Breysig, *Versuch einer Erläuterung der Reliefperspektive.* Magdeburg 1798.

M. Poudra, *Traité de perspective-relief.* Paris 1862.

R. Staudigl, *Grundzüge der Reliefperspektive.* Wien 1868.

L. Burmester, *Grundzüge der Reliefperspektive nebst Anwendung zur Herstellung reliefperspektivischer Modelle.* Leipzig 1883.

Über Photogrammetrie, d. h. die Lehre von der Rekonstruktion eines Gegenstandes aus einer oder mehreren perspektivischen Darstellungen (Photographien), vergleiche man:

F. Schilling, *Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie.* Leipzig u. Berlin 1904, wo man auch weitere Literaturangaben findet.

Fünftes Kapitel.

Elemente der projektiven Geometrie.

Projektive Punktreihen und Strahlenbüschel.

84. Von den Punkten einer geraden Linie sagt man, sie bilden eine *Punktreihe*. Die Linie heißt der *Träger* der Punktreihe.

Zwei Punktreihen heißen *projektiv*, wenn 1. jeder Punkt der einen Reihe einem Punkt der anderen entspricht, und 2. jedes System von vier Punkten der einen Reihe dasselbe Doppelverhältnis wie die (in derselben Reihenfolge genommenen) entsprechenden Punkte der anderen Reihe hat.

Unter *perspektiven* Punktreihen versteht man zwei Punktreihen, die durch Zentralprojektion auseinander hervorgehen. Perspektive Punktreihen sind gleichzeitig projektiv. Aber nicht alle projektiven Punktreihen sind perspektiv. In perspektiven Punktreihen entspricht der gemeinsame Punkt der Träger sich selbst. Umgekehrt, *wenn die Träger zweier projektiver Punktreihen einen gemeinsamen Punkt haben, der sich selbst entspricht, sind die Punktreihen perspektiv*. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen dann nämlich nach einem früher bewiesenen Satz (69) durch denselben Punkt.

Wenn zwei Punktreihen zu einer dritten projektiv sind, sind sie auch zueinander projektiv. Dies folgt sofort aus der Definition.

Punktreihen mit demselben Träger heißen *kollokal*. Wenn drei Punkte der einen von zwei projektiven Punktreihen mit den ihnen entsprechenden Punkten der anderen Reihe zusammenfallen, so fällt jeder Punkt mit seinem entsprechenden zusammen. Dies folgt aus dem letzten Satze in 69.

85. Wenn zwei projektive Punktreihen $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ auf zwei eigentlichen geraden Linien liegen und ihre unendlich fernen Punkte U und U_1 einander entsprechen, so sind die Reihen *ähnlich* oder *verhältnisgleich*. Da dann nämlich $(UABC) = (U_1A_1B_1C_1)$ ist, wird $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$. Ist zugleich $AB = A_1B_1$,

so werden die Reihen kongruent. Umgekehrt sind zwei ähnliche Reihen derart projektiv, daß die unendlich fernen Punkte einander entsprechen. Damit zwei perspektive Reihen ähnlich werden, müssen entweder die Träger parallel oder das Perspektivitätszentrum unendlich fern sein.

Zwei (nicht identische) ähnliche kollokale Punktreihen haben immer einen *Doppelpunkt* (einen Punkt, der sich selbst entspricht), nämlich den unendlich fernen Punkt des Trägers. Dieses ist der einzige Doppelpunkt, wenn die Reihen gleichsinnig kongruent sind. In allen anderen Fällen haben sie noch einen zweiten Doppelpunkt (das *Ähnlichkeitszentrum*).

86. Unter *Strahlenbüschel* versteht man die Gesamtheit aller geraden Linien (*Strahlen*), die durch einen bestimmten Punkt O gehen und in einer bestimmten Ebene liegen. O heißt der *Mittelpunkt* oder der *Scheitel* des Strahlenbüschels. Ist O unendlich fern, so heißt der Büschel ein *Parallelbüschel*. Den Strahlenbüschel, der durch die Strahlen von einem festen Punkte O nach den Punkten $A, B, C \ldots$ hin gebildet wird, bezeichnet man mit $O(ABC\ldots)$, und man sagt von ihm, daß er $A, B, C \ldots$ aus O *projiziert*. In ähnlicher Weise bezeichnet man eine Punktreihe, die durch den Schnitt einer bestimmten Linie l mit den Linien $a, b, c \ldots$ entsteht, durch $l(abc\ldots)$.

Zwei Strahlenbüschel, die in derselben Ebene liegen und verschiedene Mittelpunkte haben, heißen *perspektiv*, wenn zu jedem bestimmten Strahle des einen Büschels ein bestimmter Strahl des anderen Büschels gehört, so daß irgend zwei zusammengehörige Strahlen eine bestimmte feste Linie p in demselben Punkt schneiden. p heißt die *Perspektivitätsachse*. Perspektive Strahlenbüschel projizieren also eine und dieselbe Punktreihe (die auf der Perspektivitätsachse liegt) derart, daß entsprechende Strahlen denselben Punkt der Reihe projizieren. Der Strahl, der die Mittelpunkte der beiden Büschel verbindet, gehört ihnen beiden an und entspricht sich selbst.

87. Zwei Strahlenbüschel heißen *projektiv*, wenn 1. jedem bestimmten Strahl des einen Büschels ein bestimmter Strahl des anderen Büschels entspricht und 2. zwei entsprechende Strahlen durch entsprechende Punkte zweier projektiver Punktreihen gehen.

Haben die Strahlenbüschel denselben Mittelpunkt und liegen sie in derselben Ebene, so heißen sie *kollokal*.

Projektive Strahlenbüschel werden von irgendwelchen geraden Linien, die nicht durch die Mittelpunkte gehen, in projektiven Punktreihen geschnitten. Denn diese Reihen sind perspektiv zu

denen, die zur Bestimmung der Strahlenbüschel benutzt werden, und darum wieder zueinander projektiv.

Kongruente Strahlenbüschel sind projektiv. Denn sie können von geraden Linien in kongruenten Punktreihen geschnitten werden.

Perspektive Strahlenbüschel sind projektiv.

Zwei projektive Strahlenbüschel $a\,b\,c\ldots$ *und* $a_1\,b_1\,c_1\ldots$ *mit verschiedenen Mittelpunkten in derselben Ebene sind dann und nur dann perspektiv, wenn der Strahl* a, *der ihre Mittelpunkte verbindet, mit seinem entsprechenden Strahl* a_1 *zusammenfällt.*

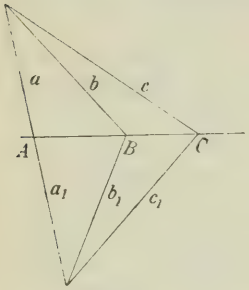


Fig. 82.

Zum Beweis verbinde man die Punkte $b\,b_1$ und $c\,c_1$ durch eine gerade Linie (Fig. 82). Diese schneidet die beiden Strahlenbüschel in projektiven Punktreihen, aber da diese Punktreihen drei Punkte A, B und C entsprechend gemein haben, fallen sie zusammen. Die Strahlenbüschel projizieren also eine und dieselbe Punktreihe und sind deshalb perspektiv.

Wenn zwei projektive Strahlenbüschel drei Strahlen gemein haben, fallen sie ganz zusammen. Denn die Punktreihen, in denen sie von einer geraden Linie geschnitten werden, haben drei Punkte entsprechend gemein und fallen sonach zusammen.

88. Man nennt eine *Punktreihe projektiv zu einem Strahlenbüschel,* wenn sie projektiv zu einer Punktreihe ist, die durch den Schnitt des Strahlenbüschels mit einer geraden Linie entsteht. Sie ist dann projektiv zu jeder Reihe, die durch den Schnitt des Strahlenbüschels mit einer nicht durch seinen Mittelpunkt gehenden geraden Linie entsteht.

89. Unter einem *Ebenenbüschel* versteht man die Gesamtheit der Ebenen, die durch dieselbe gerade Linie (die *Achse* des Ebenenbüschels) hindurchgehen.

Ein Ebenenbüschel wird von allen geraden Linien, die die Achse des Büschels nicht treffen, in projektiven Punktreihen geschnitten. Denn durch Projektion aus einem Punkte der Achse werden die Punktreihen auf eine Ebene in perspektive Punktreihen projiziert.

Zwei Ebenenbüschel heißen *projektiv*, wenn sie von geraden Linien in projektiven Punktreihen geschnitten werden. Zwei projektive Ebenenbüschel werden von beliebigen Ebenen, die nicht durch die Büschelachsen gehen, in projektiven Strahlenbüscheln geschnitten.

Zwei Ebenenbüschel heißen *perspektiv*, wenn eine Ebene existiert, die sie in demselben Strahlenbüschel schneidet.

Eine Punktreihe und ein Ebenenbüschel heißen projektiv, wenn jene zu der Punktreihe, die durch den Schnitt des Ebenenbüschels mit einer beliebigen geraden Linie entsteht, projektiv ist.

90. Projektive Punktreihen und Strahlenbüschel gehen durch eine beliebige Projektion wieder in projektive Reihen und Büschel über, wenn wir nur dafür sorgen, daß die Träger der Reihen und die Ebenen der Büschel nicht durch das Projektionszentrum hindurchgehen. Die Konstruktion projektiver Reihen oder Büschel im Raume kann deshalb direkt in der Zeichenebene ausgeführt werden, indem man bloß mit den Projektionen der Gebilde operiert. Wir wollen deshalb im folgenden nur die Konstruktionen für projektive Reihen und Büschel, die in derselben Ebene liegen, angeben.

91. *Wir wollen zunächst nachweisen, wie man auf zwei gegebenen Linien l und l_1 projektive Punktreihen derart konstruieren kann, daß drei willkürlich gegebenen Punkten A, B und C auf l drei willkürlich gegebene Punkte A_1, B_1 und C_1 auf l_1 entsprechen* (Fig. 83). Wir setzen voraus, daß keiner der gegebenen Punkte nach dem Schnittpunkt von l und l_1 fällt. Zur Konstruktion benutzen wir die Strahlenbüschel $A\,(A_1\,B_1\,C_1\,\ldots)$ und $A_1\,(ABC\ldots)$; diese Büschel müssen projektiv sein, und da AA_1 dem Strahl A_1A entspricht, werden sie auch perspektiv. Die Perspektivitätsachse p kann man sofort bestimmen, da sie durch die Schnittpunkte von AB_1 mit A_1B und von AC_1 mit A_1C hindurchgeht. Man bestimmt hierauf ein beliebiges neues Paar entsprechender Punkte D und D_1 in den beiden Reihen dadurch, daß AD_1 und A_1D einander auf p schneiden. Aus der Konstruktion geht hervor, daß der Punkt X, in dem l von p geschnitten wird, dem Schnittpunkt X_1 von l und l_1 entspricht, eben-

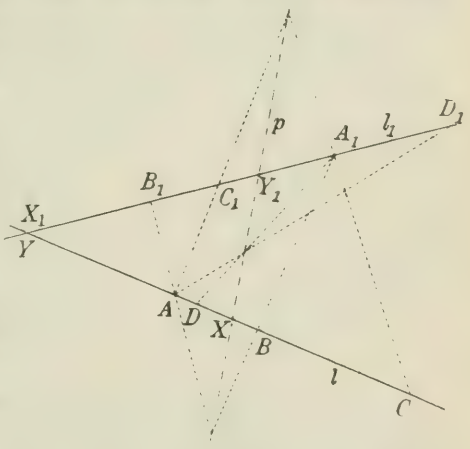


Fig. 83.

so der Punkt Y_1, in dem l_1 von p geschnitten wird, dem zu l gerechneten Schnittpunkt von l und l_1.

Die Linie p ist dieselbe, ob wir die durch Projektion aus A und A_1 entstehenden Strahlenbüschel benützen, oder ob wir die Reihen aus B und B_1 projizieren. In beiden Fällen muß nämlich die Perspektivitätsachse durch den Punkt X und den Schnittpunkt von AB_1 und A_1B gehen; also: p ist auch Perspektivitätsachse für die Strahlenbüschel $B(A_1B_1C_1\ldots)$ und $B_1(ABC\ldots)$, ebenso auch für $C(A_1B_1C_1\ldots)$ und $C_1(ABC\ldots)$, usw.

Eine Linie, welche zwei einander nicht entsprechende Punkte der Punktreihen verbindet, heißt eine *Kreuzlinie*. Zwei Kreuzlinien heißen *zusammengehörig*, wenn die Punkte der Punktreihen, die sie verbinden, einander entsprechen. So sind z. B. AB_1 und A_1B zusammengehörige Kreuzlinien.

Die gewonnenen Resultate können dann in dem folgenden *Kreuzliniensatz* zusammengefaßt werden:

Bei zwei projektiven Punktreihen mit verschiedenen Trägern liegen die Schnittpunkte aller Paare zusammengehöriger Kreuzlinien auf einer festen Linie p, der Perspektivitätsachse.

Dies kann man auf verschiedene Arten anwenden, um zwei projektive Reihen zu konstruieren. In der Fig. 84 ist z. B. eine Konstruktion des Punktepaares DD_1 mit Hilfe der gegebenen Punktepaare AA_1, BB_1 und CC_1 gegeben.

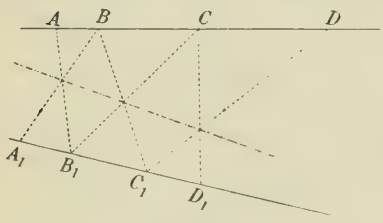


Fig. 84.

Soll man projektive kollokale Punktreihen durch drei Punktepaare bestimmen, so kann man die eine Reihe auf eine neue Linie projizieren, wodurch die Aufgabe auf die vorige reduziert wird.

Zwei projektive Punktreihen, die nicht kollokal sind, können auch durch eine Projektion der einen Reihe auf einen neuen Träger, die sie zu der anderen perspektiv macht, konstruiert werden.

92. Soll man zu einer Punktreihe einen projektiven Strahlenbüschel konstruieren, derart, daß drei gegebenen Punkten A, B und C der Punktreihe drei gegebene Strahlen a, b und c des Büschels entsprechen, so kann man den Strahlenbüschel mit einer geraden Linie l schneiden. Die so erzeugte Reihe $A_1B_1C_1\ldots$ wird dann projektiv zu $ABC\ldots$ und die Aufgabe ist auf die Konstruktion dieser Punktreihen zurückgeführt.

Besonderes Interesse hat die Konstruktion, die man bekommt,

wenn die Linie l unendlich fern liegt und man dann den Satz über Kreuzlinien anwendet. Diese Konstruktion setzt voraus, daß weder der Träger der Reihe $(ABC\ldots)$ noch der Mittelpunkt des Strahlenbüschels unendlich fern liegt.

Für die praktische Ausführung trägt man die Punktreihe $ABC\ldots$ auf einer beweglichen Linie auf und verschiebt diese so lange, bis die drei Punkte A, B, C auf die Strahlen a, b, c fallen. Jeder Punkt der Reihe wird dann auf den ihm entsprechenden Strahl des Büschels fallen.

93. Zwei projektive Strahlenbüschel können durch drei gegebene Paare entsprechender Strahlen bestimmt werden, indem man sie mit geraden Linien schneidet und die so erzeugten projektiven Punktreihen konstruiert. Sind die gegebenen Strahlenpaare a und a_1, b und b_1, c und c_1 und haben die Büschel nicht denselben Mittelpunkt, so kann man sie z. B. mit a_1 und a schneiden. Die Reihen $a_1\ (abc\ldots)$ und $a\ (a_1b_1c_1\ldots)$ sind dann perspektiv und können sonach leicht konstruiert werden.

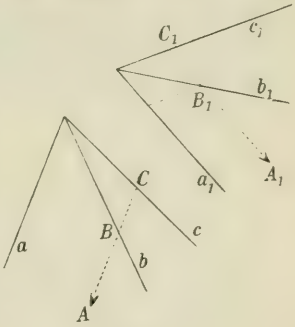


Fig. 85.

Wenn aber die Mittelpunkte der Strahlenbüschel nicht unendlich fern sind, wendet man mit Vorteil folgende Konstruktion an (Fig. 85): $(abc\ldots)$ wird mit einer zu a parallelen Linie in der Reihe $(ABC\ldots)$ und $(a_1b_1c_1\ldots)$ mit einer zu a_1 parallelen Linie in der Reihe $(A_1B_1C_1\ldots)$ so geschnitten, daß $B_1C_1 = BC$ wird. Die Reihen $(ABC\ldots)$ und $(A_1B_1C_1\ldots)$ werden dann kongruent und man kann deswegen entsprechende Punkte in ihnen leicht finden.

Punktreihen auf dem Kreis und ihre Anwendung.

94. Wenn ein Punkt A einen Kreis durchläuft, so daß er sich immer in demselben Drehsinn bewegt, so drehen sich seine Verbindungslinien mit zwei festen Punkten P und Q des Kreises ebenfalls in demselben Sinn und beschreiben in derselben Zeit gleichgroße Winkel. Gelangt A bei der Bewegung nach P (oder Q), so betrachtet man die Tangenten in P (oder Q) als die Verbindungslinie von A und P (oder Q). Dann kann man sagen, daß, wenn A den ganzen Kreis durchläuft, PA und QA gleichsinnig kongruente Strahlenbüschel durchlaufen. Eine Punktreihe $ABC\ldots$ auf dem

Kreise wird also aus zwei Punkten P und Q des Kreises durch kongruente Strahlenbüschel $P(ABC\ldots)$ und $Q(ABC\ldots)$ projiziert. Betrachtet man PQ als zum Büschel $P(ABC\ldots)$ gehörig, so ist der entsprechende Strahl im anderen Büschel die Tangente in Q.

95. Zwei Punktreihen $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ auf demselben Kreise heißen *projektiv*, wenn sie aus einem Punkte S des Kreises durch projektive Strahlenbüschel $S(ABC\ldots)$ und $S(A_1B_1C_1\ldots)$ projiziert werden. Aus dieser Definition folgt, daß die beiden Reihen auch aus zwei willkürlich gewählten Punkten P und Q auf dem Kreise durch projektive Strahlenbüschel projiziert werden. Denn $P\,(ABC\ldots)$ und $Q\,(A_1B_1C_1\ldots)$ sind zu $S\,(ABC\ldots)$ und $S\,(A_1B_1C_1\ldots)$ projektiv, und da die letzten beiden Büschel projektiv sind, gilt dasselbe auch von den beiden erstgenannten. Zwei projektive Punktreihen auf einem Kreise sind also durch drei Paar entsprechender Punkte bestimmt.

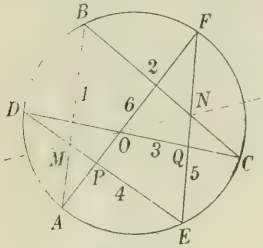


Fig. 86.

96. *Pascalscher Satz: Die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten in einem Sechseck, das einem Kreis einbeschrieben ist, liegen auf einer geraden Linie.*

In der Fig. 86 ist $ABCDEF$ ein einbeschriebenes Sechseck. Die Seiten AB, BC, CD, DE, EF und FA sind der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6

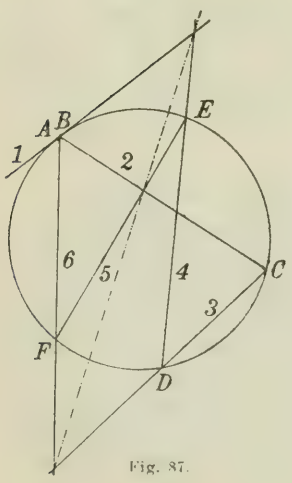


Fig. 87.

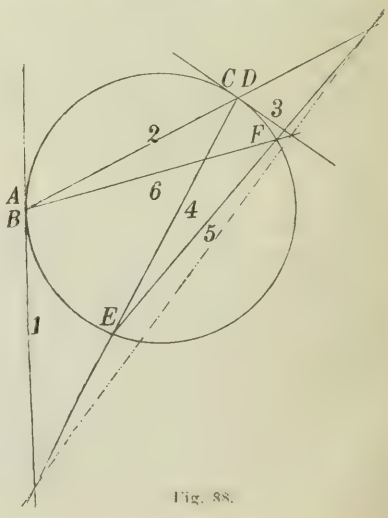


Fig. 88.

bezeichnet. Die Schnittpunkte, M von 1 und 4, N von 2 und 5 und O von 3 und 6, liegen dann auf einer geraden Linie. Der Beweis verläuft wie folgt: Die Büschel $A\,(DBFE)$ und $C\,(DBFE)$ sind kongruent und werden also von DE und EF in projektiven Punktreihen geschnitten. Folglich ist $(DMPE)$ projektiv zu $(QNFE)$. Da aber E in diesen Punktreihen sich selbst entspricht, sind die Reihen perspektiv. Also gehen die Linien DQ, MN und PF durch denselben Punkt (das Perspektivitätszentrum), aber da DQ und PF einander in O schneiden, geht auch MN durch diesen Punkt, w. z. b. w.

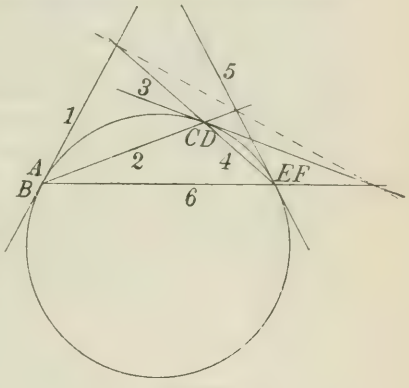


Fig. 89.

Läßt man zwei aufeinander folgende Ecken des Sechsecks zusammenfallen, so gilt der Satz auch, indem die Seite, die diese zusammenfallenden Ecken verbindet, in eine Tangente des Kreises übergeht. In den Figuren 87—89 sind folgende drei Fälle behandelt: 1. A und B fallen zusammen, 2. A fällt nach B, C nach D, 3. A fällt nach B, C nach D und E nach F.

97. Wir wollen nun nachweisen, daß von zwei projektiven Punktreihen auf demselben Kreis ein ganz ähnlicher Satz gilt wie der, den wir für projektive Punktreihen auf zwei verschiedenen geraden Linien gefunden haben. Die Reihen denken wir uns dabei gegeben durch drei Paare entsprechender Punkte: A und A_1, B und B_1, C und C_1.

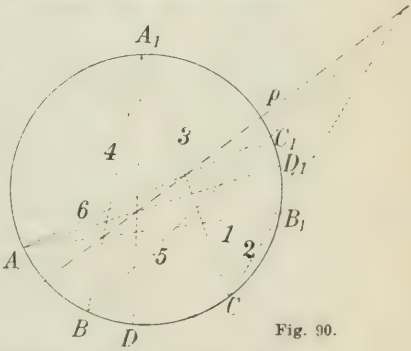


Fig. 90.

Jede Linie, die den Kreis in zwei einander nicht entsprechenden Punkten schneidet, nennen wir wieder eine Kreuzlinie. Zwei Kreuzlinien heißen zusammengehörig, wenn die eine von ihnen den Kreis in zwei Punkten schneidet, die den Schnittpunkten der anderen Linie mit dem Kreis entsprechen. Dann gilt der Satz:

Die Schnittpunkte zusammengehöriger Kreuzlinien liegen auf einer festen geraden Linie, der Perspektivitätsachse (Fig. 90).

Beweis: Die Schnittpunkte von AB_1 und A_1B, BC_1 und B_1C, CA_1 und C_1A liegen nach dem Pascalschen Satze auf e er geraden Linie p; diese Linie ist die Perspektivitätsachse für ie perspektiven Strahlenbüschel $A(A_1B_1C_1\ldots)$ und $A_1(ABC\ldots)$. Ein beliebiges neues Punktepaar DD_1 wird also daraus gefunden, daß AD_1 und A_1D einander auf p schneiden. Hiermit ist bewiesen, daß jedes Paar zusammengehöriger Kreuzlinien, die von A und A_1 ausgehen, einander auf p schneidet. Aber die Strahlenbüschel $B(A_1B_1C_1\ldots)$ und $B_1(ABC\ldots)$ sind auch perspektiv, und da ihre Perspektivitätsachse durch die Schnittpunkte von BA_1 und B_1A, BC_1 und B_1C hindurchgeht, fällt sie mit p zusammen. Also schneiden auch irgend zwei zusammengehörige Kreuzlinien, die von B und B_1 ausgehen, einander auf p. Auf diese Weise kann man nun fortfahren, bis man zu einem Paar Kreuzlinien kommt, die von einem beliebigen Paar entsprechender Punkte in den beiden Reihen ausgehen.

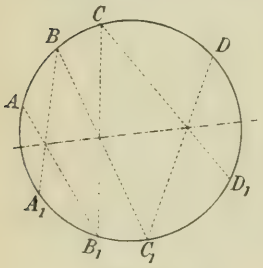


Fig. 91.

Der Kreuzliniensatz kann auf verschiedene Arten zur Konstruktion der beiden Reihen verwendet werden. Die nebenstehende Fig. 91 zeigt die Bestimmung eines beliebigen Punktepaares D und D_1.

Wenn p den Kreis schneidet, so entspricht jeder der Schnittpunkte sich selbst und heißt ein *Doppelpunkt* der beiden Reihen. Zwei projektive Punktreihen auf einem Kreise haben also zwei, einen oder keinen Doppelpunkt, je nachdem p den Kreis schneidet, berührt oder nicht trifft.

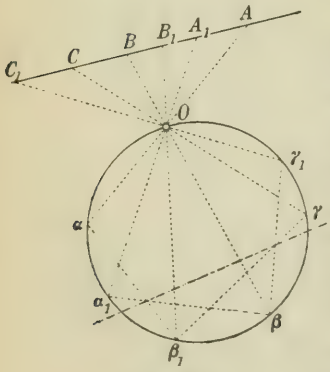


Fig. 92.

98. Zwei kollokale projektive Punktreihen $(ABC\ldots)$ und $(A_1B_1C_1\ldots)$ auf einer geraden Linie kann man nun konstruieren, indem man sie auf einen beliebigen Kreis aus einem willkürlichen Punkte dieses Kreises projiziert (Fig. 92). Auf diese Weise erhält man die projektiven Reihen $(\alpha\beta\gamma\ldots)$ und $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ auf dem Kreise. Es wird dann ein neues Punktepaar in den Punktreihen auf dem Kreis konstruiert und aus O auf die gerade Linie zurückprojiziert, auf diese Weise gelangt man zu einem Paar entsprechender Punkte in den ursprüng-

lichen Reihen. Ein Doppelpunkt in den Reihen auf dem Kreis liefert einen Doppelpunkt in den ursprünglichen Reihen. Zwei kollokale projektive Punktreihen auf einer geraden Linie haben also entweder zwei, einen oder keinen Doppelpunkt.

99. Wir haben gleichzeitig eine neue Konstruktion für zwei projektive kollokale Strahlenbüschel $O(ABC\ldots)$ und $O(A_1B_1C_1\ldots)$ gefunden: Durch ihren gemeinsamen Mittelpunkt O wird ein Kreis gelegt, und es werden die Punktreihen, in denen dieser die Strahlenbüschel schneidet, konstruiert. Ein beliebiges Punktepaar in diesen Reihen bestimmt ein Strahlenpaar in dem Strahlenbüschel. Ein Doppelpunkt der Reihen bestimmt einen Doppelstrahl der Büschel. Zwei projektive kollokale Strahlenbüschel haben also entweder zwei, einen oder keinen Doppelstrahl.

Die angegebene Methode kann indessen nicht angewendet werden, wenn der gemeinsame Mittelpunkt der Strahlenbüschel unendlich fern liegt. In diesem Falle kann man sie aber durch eine beliebige gerade Linie schneiden und dann die angeführten Konstruktionen anwenden.

Involutionen.

100. Wir betrachten zwei projektive Punktreihen $(ABC\ldots)$ und $(A_1B_1C_1\ldots)$ auf derselben geraden Linie. Ein beliebiger Punkt der Linie kann zu jeder der Punktreihen gerechnet werden. Wir lassen deswegen immer die Bezeichnung, die wir dem Punkt geben, andeuten, zu welcher der Reihen er gehört. Gehört er zur ersten Reihe, so bezeichnen wir ihn z. B. mit P; dann entspricht ihm ein Punkt P_1 der anderen Reihe. Soll er zur anderen Reihe gehören, so kann er mit Q_1 bezeichnet werden, es entspricht ihm dann ein Punkt Q der ersten Reihe. Q und P_1 fallen nicht immer zusammen; man braucht, um dies einzusehen, nur zwei kongruente Reihen zu betrachten, von denen die eine aus der anderen durch Parallelverschiebung hervorgeht. Wir wollen nun aber den Fall näher untersuchen, wo Q und P_1 zusammenfallen. Wir setzen also von unseren Punktreihen voraus, daß der einem bestimmten Punkte P der ersten Reihe entsprechende (von P verschiedene) Punkt P_1 der zweiten Reihe gleichzeitig als Punkt Q der ersten Reihe dem mit P zusammenfallenden Punkte Q_1 der zweiten Reihe entspricht. Wir wollen dann zeigen, daß *jedes Paar entsprechender Punkte der beiden Reihen dieselbe Eigenschaft hat.*

R und R_1 sei ein solches Punktepaar; fällt S_1 nach R, so soll bewiesen werden, daß S nach R_1 fällt (Fig. 93). $P_1Q_1R_1S_1$

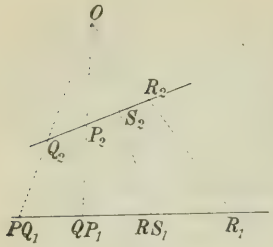


Fig. 93.

werden aus O auf einen neuen Träger in $P_2 Q_2 R_2 S_2$ projiziert. Diese letzte Reihe ist dann projektiv zu $PQRS$. Die Perspektivitätsachse für diese Punktreihen geht durch O, da PQ_2 und $P_2 Q$ zusammengehörige Kreuzlinien sind. Die Kreuzlinie RS_2 schneidet nun die Perspektivitätsachse in O, und durch diesen Punkt muß sonach $R_2 S$ gehen; also fällt S nach R_1, w. z. b. w.

Von den *Punktreihen* sagt man, daß sie auf der geraden Linie eine *Involution* bilden (oder involutorisch sind). Von den *Punktepaaren* sagt man, daß sie eine *involutorische Reihe* bilden.

101. Kennt man von der Involution zwei Punktepaare AA_1 und BB_1, so ist sie bestimmt; denn die projektiven Reihen $(AA_1B\ldots)$ und $(A_1AB_1\ldots)$ sind bestimmt, da man drei Punktepaare A und A_1, A_1 und A, B und B_1 in ihnen kennt. Im folgenden setzen wir voraus, daß keiner der Punkte A, A_1, B und B_1 unendlich fern ist. Des weiteren setzen wir voraus, daß keine zwei von diesen Punkten zusammenfallen.

Der Punkt O, der dem unendlich fernen Punkt O_1 entspricht, heißt das *Zentrum* der Involution. Ist zunächst O unendlich fern, so werden die beiden projektiven Reihen $(AA_1B\ldots)$ und $(A_1AB_1\ldots)$ ähnlich mit einem bestimmten Ähnlichkeitspunkt M. Da nun

$$\frac{AM}{A_1M} = \frac{A_1M}{AM},$$

wird dieses Abstandsverhältnis $= \pm 1$, und da A und A_1 verschieden sind, müssen wir den Wert -1 wählen. Die Punktreihen liegen also symmetrisch für den Punkt M.

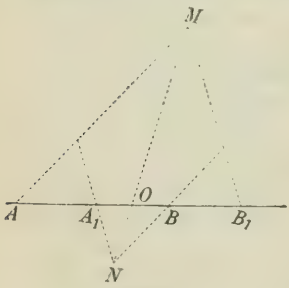


Fig. 94.

Wir behandeln jetzt den Fall, wo O nicht unendlich fern ist; man findet dann $(ABOO_1) = (A_1B_1O_1O)$ oder, da O_1 unendlich fern ist,

$$\frac{AO}{BO} = \frac{B_1O}{A_1O},$$

folglich:

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1.$$

Das Zentrum der Involution hat also die Eigenschaft, daß *das Produkt seiner*

Abstände von einem beliebigen Punktepaar der Involution konstant ist. Dies Produkt heißt die *Potenz* der Involution. Wir finden danach folgende Konstruktion (Fig. 94). Wir wählen einen Punkt M beliebig außerhalb des Trägers der Involution und ziehen $BN \parallel AM$ und $A_1N \parallel B_1M$; MN geht dann durch O, denn es wird

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{ON} = \frac{OB_1}{OA_1},$$

folglich

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1.$$

Man kann auch O daraus finden, daß es für zwei Kreise, von denen der eine durch A und A_1, und der andere durch B und B_1 geht, dieselbe Potenz haben muß; O liegt also auf der Potenzachse dieser Kreise.

102. Ist die Potenz positiv, so hat die Involution zwei Doppelpunkte, deren Abstände von O gleich der mittleren Proportionale von OA und OA_1, OB und OB_1 usw. sind. Nennt man die Doppelpunkte X und Y, so hat man

$$OX = -OY = \sqrt{OA \cdot OA_1}.$$

Jedes Punktepaar der Involution ist mit den beiden Doppelpunkten harmonisch verbunden, denn es wird $(XYAA_1) = (XYA_1A)$. Also: *Wenn eine involutorische Punktreihe zwei Doppelpunkte hat, so besteht die Involution aus allen Punktepaaren, die mit den Doppelpunkten harmonisch verbunden sind.* Das Zentrum der Involution liegt in der Mitte zwischen den Doppelpunkten.

Ist die Potenz negativ, so hat die Involution keinen Doppelpunkt. In diesem Falle schneiden die über AA_1 und BB_1 als Durchmesser beschriebenen Kreise (Fig. 95) einander in zwei Punkten M und N, deren Verbindungslinie (die Potenzlinie der beiden Kreise) durch das Involutionszentrum O geht. Die beiden Kreise bestimmen einen Kreisbüschel, und jeder Kreis dieses Büschels schneidet ein Punktepaar der Involution aus, also müssen die Winkel AMA_1, BMB_1, CMC_1 ... rechte sein, und man findet: *Wenn eine involutorische Punktreihe keine Doppelpunkte hat, so existieren in der Ebene zwei Punkte M und N, aus denen jedes Punktepaar der Involution durch zwei aufeinander senkrechte Linien projiziert wird.* Eine solche Involution wird am einfachsten durch

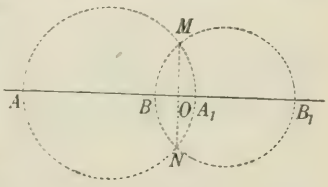


Fig. 95.

die Linie, auf der sie liegt, und einen der Punkte M und N dargestellt.

Wenn die Involution durch zwei Punktepaare AA_1 und BB_1 gegeben ist, so kann man unmittelbar erkennen, welcher der beiden gekennzeichneten Fälle eintritt. Nämlich wenn die Punkte des einen Paares die Punkte des anderen voneinander trennen, hat die Involution keinen Doppelpunkt. Wenn aber die Paare einander nicht trennen (von den Strecken AA_1 und BB_1 die eine ganz auf oder ganz außerhalb der anderen liegt), hat die Involution Doppelpunkte.

103. In dem Falle, wo zwei kollokale projektive Strahlenbüschel ein Paar verschiedene zusammengehörige Strahlen enthalten, die einander entsprechen, auch wenn sie vertauscht werden, hat jedes Paar entsprechender Strahlen in den Büscheln diese Eigenschaft. Die Strahlenbüschel werden dann nämlich von einer geraden Linie, die nicht durch ihren Mittelpunkt geht, in einer involutorischen Punktreihe geschnitten. Von den Strahlenbüscheln sagt man, sie bilden eine *Involution*. Von den Strahlenpaaren sagt man auch, sie bilden einen *involutorischen Büschel*.

Zwei projektive Punktreihen auf einem Kreis bilden eine *Involution*, wenn jedes Paar entsprechender Punkte vertauscht werden kann. Ein involutorischer Büschel wird von einem beliebigen Kreis, der durch den Mittelpunkt des Büschels geht, in einer Involution geschnitten.

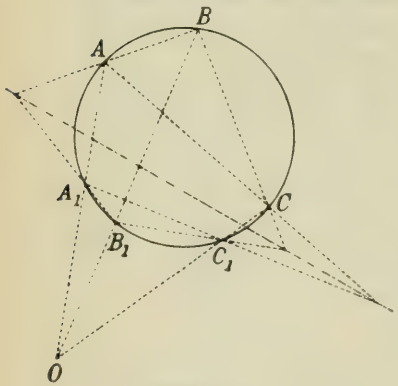


Fig. 96.

104. *In einer Involution auf dem Kreis gehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt O.* Dieser Punkt heißt das *Perspektivitätszentrum*.

Beweis (Fig. 96): AA_1, BB_1, CC_1 seien drei beliebige Punktepaare der Involution. Wir wenden den Satz von den Kreuzlinien an, indem wir beachten, daß jetzt nicht bloß AB_1 und A_1B, sondern auch AB und A_1B_1 und die analogen Verbindungslinien zusammengehörige Kreuzlinien bilden. So finden wir zwischen den beiden Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ die Beziehung, daß die Schnittpunkte entsprechender Seiten AB und A_1B_1, BC und B_1C_1, CA und C_1A_1 auf einer geraden Linie (der Perspektivitätsachse)

liegen. Die Linien AA_1, BB_1 und CC_1 gehen also nach dem Desarguesschen Satz durch denselben Punkt O (74).

Liegt dieser Punkt außerhalb des Kreises, so hat die Involution zwei Doppelpunkte, nämlich die Berührungspunkte der Tangenten, die man von O an den Kreis legen kann. Dies sind gleichzeitig die Schnittpunkte der Perspektivitätsachse mit dem Kreise. Liegt O innerhalb des Kreises, so gibt es keinen Doppelpunkt. Der Grenzfall, wo O auf dem Kreise liegt, ist ohne Bedeutung.

Ist die Involution auf dem Kreis durch zwei Punktepaare AA_1 und BB_1 bestimmt, so kann man das Zentrum O sofort als den Schnittpunkt der Linien AA_1 und BB_1 konstruieren. Man findet dann neue Punktepaare, indem man den Kreis mit geraden Linien durch O schneidet.

105. Ein involutorischer Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt nicht unendlich fern liegt, wird durch zwei Paare zusammengehöriger Strahlen a, a_1 und b, b_1 bestimmt, indem man ihn mit einem Kreise durch den Büschelmittelpunkt schneidet (Fig. 97). Hierdurch entsteht auf dem Kreis eine Involution, von der man zwei Punktepaare AA_1 und BB_1 kennt und die übrigen Paare sofort konstruieren kann. Projiziert man dann diese jedesmal aus dem Büschelmittelpunkt, so erhält man immer zwei zusammengehörige Strahlen der Strahleninvolution. Wenn die gegebenen Strahlenpaare einander nicht trennen, so fällt der Schnittpunkt O von AA_1 und BB_1 außerhalb des Kreises, die Involution auf dem Kreis hat dann zwei Doppelpunkte und die Strahleninvolution zwei Doppelstrahlen p und q, die durch die Berührungspunkte der aus O an den Kreis gelegten Tangenten hindurchgehen. Trennen die beiden Strahlenpaare einander, so hat die Strahleninvolution keine Doppelstrahlen.

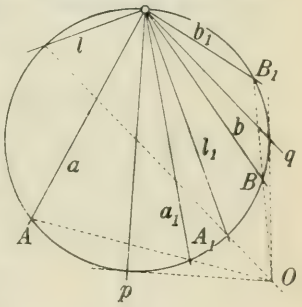


Fig. 97.

In jedem Falle enthält die Involution ein Paar zusammengehöriger Linien l und l_1, die aufeinander senkrecht sind. Diese Linien gehen durch die Endpunkte des Durchmessers, der durch O gezogen werden kann.

Fällt O in den Mittelpunkt des Kreises, so bildet jedes Strahlenpaar der Involution einen rechten Winkel. Wir sprechen dann von einer *orthogonalen Strahleninvolution*.

Liegt der Punkt O unendlich fern, so sind die Doppelstrahlen

der Strahleninvolution aufeinander senkrecht, und die Strahlen eines beliebigen Strahlenpaares bilden mit ihnen gleiche Winkel. Wir sprechen dann von einer *symmetrischen Strahleninvolution.*

Da eine Strahleninvolution von einer geraden Linie, die nicht durch den Mittelpunkt des Büschels geht, in einer Punktinvolution geschnitten wird, muß jedes Strahlenpaar einer Strahleninvolution durch die Doppelstrahlen, wenn diese existieren, harmonisch getrennt werden. Das Strahlenpaar, das einen rechten Winkel bildet, besteht aus den Halbierungslinien der Winkel zwischen den Doppelstrahlen.

Ein involutorischer Strahlenbüschel mit unendlich fernem Mittelpunkt wird mit Hilfe der Punktinvolution konstruiert, in der der Büschel von einer willkürlichen geraden Linie geschnitten wird.

Eine Punktinvolution kann auch dadurch konstruiert werden, daß man sie auf einen beliebigen Kreis aus irgendeinem Punkte des Kreises projiziert und die so bestimmte Involution auf dem Kreis konstruiert. Diese Methode findet insbesondere Anwendung, wenn die gegebene Punktinvolution auf der unendlich fernen Geraden liegt.

Pol und Polare. Das Dualitätsprinzip.

106. An einen gegebenen Kreis ziehen wir durch einen Punkt P, der nicht auf dem Kreise liegt, die Sekanten und bestimmen auf jeder von ihnen einen Punkt P_1, so daß P und P_1 die Schnittpunkte der Sekante mit dem Kreise harmonisch trennen. *Alle diese Punkte P_1 liegen dann auf einer gewissen geraden Linie p,* welche die *Polare* von P bezügl. des Kreises heißt. P selbst heißt der *Pol* der Linie p (vgl. Fig. 98).

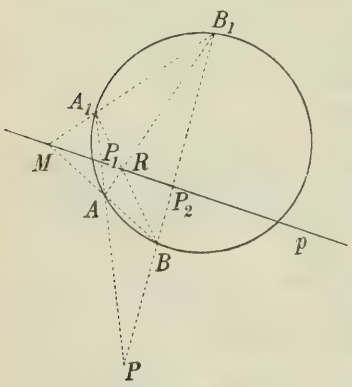


Fig. 98.

Daß die Punkte P_1 wirklich auf einer geraden Linie liegen, erkennt man wie folgt: Es ergibt sich auf dem Kreise eine bestimmte Punktinvolution, für welche P das Zentrum ist, und die Perspektivitätsachse dieser Involution enthält alle Punkte P_1. Sind nämlich AA_1 und BB_1 zwei willkürliche Punktepaare der Involution, so geht die Achse p durch den Schnittpunkt M

von AB und A_1B_1 und den Schnittpunkt R von A_1B und AB_1 und infolge des Satzes vom vollständigen Vierseit (71) muß dann p die Linie AA_1 in einem solchen Punkte P_1 schneiden, daß P und P_1 mit A und A_1 harmonisch verbunden sind. Ebenso muß p die Linie BB_1 in einem Punkte P_2 schneiden, so daß P und P_2 mit B und B_1 harmonisch verbunden sind. Der Satz ist damit bewiesen und wir haben gleichzeitig eine allgemeine *Konstruktion für die Polare eines gegebenen Punktes* gefunden: Durch P ziehen wir zwei Sekanten AA_1 und BB_1, dann ist die Verbindungslinie der Diagonalpunkte M und R des vollständigen Vierseits AA_1BB_1 die gesuchte Polare.

107. Aus der Definition folgt, daß *die Polare des Mittelpunktes die unendlich ferne Gerade ist*, weiter daß *die Polare für einen unendlich fernen Punkt ein Durchmesser ist, der zu der den Punkt bestimmenden Richtung senkrecht ist.*

Ist P ein beliebiger Punkt außerhalb des Kreises, so geht seine Polare durch die Berührungspunkte der Tangenten, die man von P an den Kreis legen kann. Liegt der Punkt innerhalb des Kreises, so fällt seine Polare ganz außerhalb des Kreises. In beiden Fällen ist die Polare senkrecht zu dem Durchmesser, der durch P geht.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß P nicht auf dem Kreise liegt. Wenn aber der Punkt P sich einem bestimmten Punkte A des Kreises nähert, z. B. indem P sich auf der Tangente a in A bewegt, so nähert sich seine Polare der Tangente a. Wir wollen deswegen durch Definition festlegen, daß die Polare eines Punktes auf dem Kreise die Tangente in diesem Punkte sein soll. So erhält jeder Punkt in der Ebene des Kreises eine bestimmte Polare.

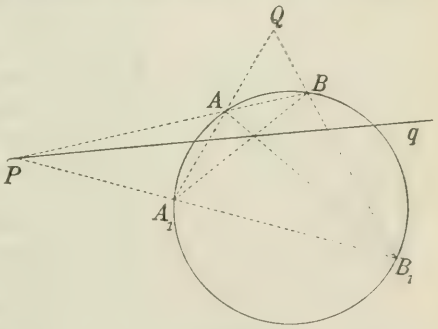


Fig. 99.

108. *Wenn ein Punkt P auf der Polare q eines anderen Punktes Q liegt, so liegt auch Q auf der Polare p von P.*

Beweis: Wir setzen zunächst voraus, daß weder P noch Q auf dem Kreise liegt (Fig. 99). Durch P ziehen wir dann eine Linie, die den Kreis in A und B schneidet. QA und QB mögen den Kreis außerdem in

A_1, B_1 schneiden. Man weiß nun, daß A_1B_1 und AB einander in einem Punkte von q schneiden, also in P. Daraus folgt aber, daß die Polare von P durch Q geht. Liegt Q auf dem Kreise, so wird q die Tangente in Q, und da P auf dieser Tangente liegt, so geht seine Polare durch Q.

Zwei Punkte, von denen der eine auf der Polare des anderen liegt, heißen *konjugiert*. Ein Punkt ist konjugiert zu sich selbst, wenn er auf dem Kreise liegt.

109. *Zwei verschiedene Punkte P und Q können nicht dieselbe Polare haben.*

Beweis: 1. Liegt einer der Punkte auf dem Kreise, so ist seine Polare die Tangente in dem Punkte, und diese kann die Polare keines anderen Punktes sein als die ihres Berührungspunktes.

2. Liegt einer der Punkte außerhalb des Kreises, so konstruiert man eine Polare mit Hilfe der aus dem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten. Hieraus sieht man sofort, daß die Polaren nicht zusammenfallen können.

3. Liegen beide Punkte innerhalb des Kreises, so schneidet die Linie PQ den Kreis in zwei Punkten A und A_1. Man sieht dann, daß die Polaren von P und Q diese Linie in zwei verschiedenen Punkten schneiden müssen und also nicht zusammenfallen können.

110. *Jede gerade Linie a hat einen bestimmten Pol A.*

Beweis: Auf a wählen wir zwei Punkte M und N. Die Polaren m und n dieser Punkte sind nach dem eben Bewiesenen notwendigerweise verschieden und haben deswegen einen und nur einen Punkt A gemeinsam. Da A aber auf m und n liegt, geht seine Polare durch M und N, d. h. die Polare von A ist a. Ist a eine Tangente des Kreises, so fällt der Pol in den Berührungspunkt. Ist a eine Sekante des Kreises, so bestimmt sich ihr Pol als der Schnittpunkt der Kreistangenten in den Schnittpunkten von a. Liegt a ganz außerhalb des Kreises, so kann man den Pol auf folgende Weise konstruieren (Fig. 100): Aus dem Kreismittelpunkt O fällt man das Lot OB auf a, dann schneidet die Polare b von B das Lot in dem gesuchten Punkt A. Die Figur liefert zugleich eine Konstruktion für die Polare a eines Punktes A, der innerhalb des Kreises liegt.

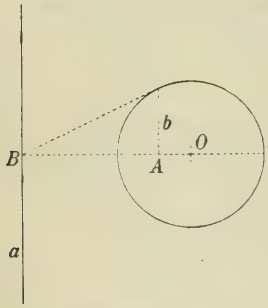


Fig. 100.

111. Wenn ein Punkt P eine Linie a durchläuft, so dreht sich seine Polare p um einen festen Punkt A, den Pol von a (108). Wir wollen nun beweisen, daß *die von P beschriebene Punktreihe projektiv zu dem von p beschriebenen Strahlenbüschel ist.*

Ist a ein Durchmesser des Kreises und wird dieser von p im Punkte P_1 getroffen, so sind P und P_1 beständig harmonisch verbunden mit den Endpunkten des Durchmessers, sie beschreiben also projektive Punktreihen (102). Folglich ist die Reihe (P) projektiv zu dem Büschel (p). Ist a kein Durchmesser (Fig. 101), so beschreiben OP und p kongruente Strahlenbüschel, da entsprechende Strahlen aufeinander senkrecht sind. Der Satz ist also vollständig bewiesen.

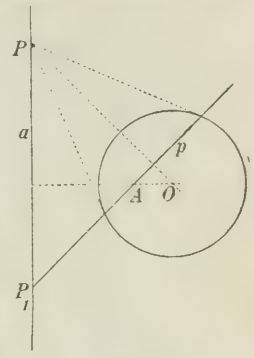


Fig. 101.

Gleichzeitig sehen wir, daß P und sein konjugierter Punkt P_1 auf der Linie a (von der man indessen voraussetzen muß, daß sie keine Tangente des Kreises ist) projektive Punktreihen durchlaufen, und da jedes Paar entsprechender Punkte in diesen Reihen vertauscht werden kann, müssen sie eine Involution bilden. Mithin:

Die konjugierten Punktepaare auf einer geraden Linie a, die den Kreis nicht berührt, bilden eine Involution.

Wenn a den Kreis schneidet, so sind die Schnittpunkte die Doppelpunkte der Involution. Wenn a den Kreis nicht schneidet, hat die Involution keine Doppelpunkte. Das Zentrum der Involution ist in allen Fällen der Fußpunkt des Lotes, das man aus dem Kreismittelpunkt auf a fällt.

112. Zwei gerade Linien in der Ebene des Kreises heißen konjugiert, wenn jede von ihnen durch den Pol der anderen geht. In der Figur 101 sind AP und AP_1 konjugierte Linien. Man erkennt, daß *die konjugierten Strahlenpaare, die durch einen gegebenen Punkt A* (der nicht auf dem Kreise liegt) *hindurchgehen, einen involutorischen Büschel bilden*, da dieser durch Projektion einer involutorischen Punktreihe entsteht. Lassen sich von A Tangenten an den Kreis legen, so bilden diese die Doppelstrahlen der Involution. Fällt A in den Kreismittelpunkt, so werden die konjugierten Strahlen zu konjugierten Durchmessern, und die Involution geht in eine orthogonale über.

113. Aus den angeführten Sätzen über Pole und Polare geht hervor, daß man mit Hilfe eines bestimmten Kreises eine solche Verknüpfung zwischen den Punkten und geraden Linien der Ebene

herstellen kann, daß 1. jedem Punkte A (als Pol) eine bestimmte Linie a (als Polare) entspricht und umgekehrt, und 2. den Punkten einer geraden Linie die geraden Linien durch einen bestimmten Punkt entsprechen. Ferner werden projektiven Punktreihen immer projektive Strahlenbüschel entsprechen, und einer involutorischen Reihe auf einer geraden Linie wird ein involutorischer Strahlenbüschel zugeordnet sein.

Man kann hierauf ein wichtiges geometrisches Prinzip begründen, das *Dualitätsprinzip,* nach welchem aus einem geometrischen Satz ein neuer (der *dual entsprechende*) abgeleitet werden kann, indem man in dem ersten Satz „Punkt" mit „Linie", „Verbindungslinie zweier Punkte" mit „Schnittpunkt zweier Linien", „Punkt auf einer Linie" mit „Linie durch einen Punkt" vertauscht.

Die Sätze vom vollständigen Vierseit und vom vollständigen Viereck bilden ein Beispiel für zwei dual entsprechende Sätze, ebenso die beiden Sätze über perspektive Dreiecke.

Das Dualitätsprinzip kann unmittelbar nur auf solche Sätze angewendet werden, die sogenannte projektive Eigenschaften ausdrücken, d. h. solche Eigenschaften, die bei einer Zentralprojektion erhalten bleiben; aber in manchen Fällen gelingt es doch, Sätze, die nicht von der soeben angegebenen Art zu sein scheinen, durch Umschreibung auf eine solche besondere Form zu bringen, daß das Prinzip Anwendung finden kann.

Da die Punkte des Kreises die Pole der in ihnen berührenden Tangenten sind, kann man durch das Dualitätsprinzip aus einigen bekannten Sätzen über die Punkte eines Kreises neue Sätze über die Tangenten ableiten. So entspricht dem Satz: „Die Strahlen aus zwei festen Punkten eines Kreises nach einem beweglichen Punkt dieses Kreises beschreiben projektive Strahlenbüschel" der reziproke Satz: „Eine bewegliche Tangente schneidet zwei feste Tangenten in projektiven Punktreihen".

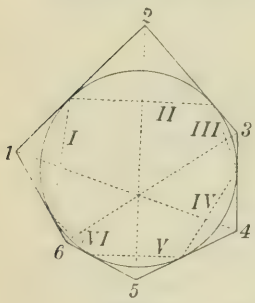


Fig. 102.

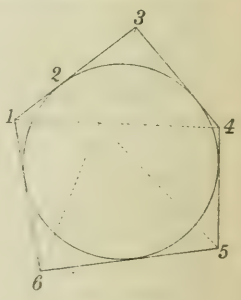


Fig. 103.

114. Der dual entsprechende Satz zu dem Pascalschen Satz ist der *Brianchonsche Satz:*

Die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken eines belie-

bigen einem Kreis umschriebenen Sechsecks gehen durch denselben Punkt.

Beweis. In der Figur 102 sind die Ecken des Sechsecks mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 bezeichnet. Ihre Polaren I, II, III, IV, V und VI sind die Seiten eines einbeschriebenen Sechsecks, also liegen die Schnittpunkte von I und IV, II und V, III und VI auf einer geraden Linie. Aber die

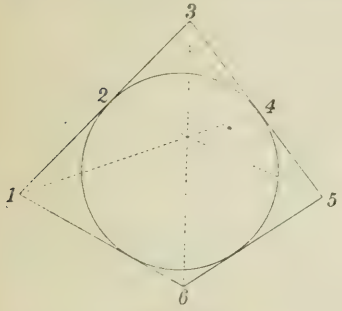


Fig. 104.

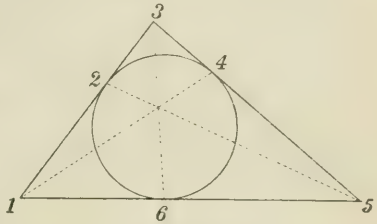


Fig. 105.

Polare dieser Schnittpunkte sind die Linien 1 4, 2 5 und 3 6, die also durch denselben Punkt gehen müssen.

Von Interesse sind auch die besonderen Fälle, wo zwei aufeinanderfolgende Seiten zusammenfallen; die Ecke, in der sie „sich schneiden", ist dann ihr gemeinsamer Berührungspunkt mit dem Kreise (vgl. Fig. 103—105).

Hilfskonstruktionen.

115. Bei der praktischen Ausführung von Konstruktionen stößt man oft auf die Schwierigkeit, daß ein Punkt, der bei der Konstruktion benutzt werden soll, unerreichbar wird, indem er als Schnittpunkt zweier Linien bestimmt wird, die sich innerhalb der Grenzen des Zeichenpapieres nicht schneiden. Wir geben hier nur zwei Beispiele für die Methoden, die dazu dienen, diese Schwierigkeit zu überwinden (vgl. 36).

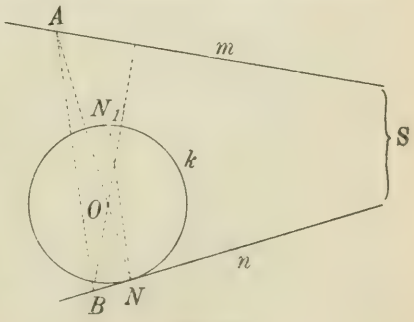


Fig. 106.

1. Beispiel: Zwei Linien m und n, von welchen die letzte den Kreis k in N berührt, schneiden einander in einem

unzugänglichen Punkte S. Von S soll eine neue Tangente an den Kreis gezogen werden. (Fig. 106.)

Der Durchmesser ON schneidet m in A; der Durchmesser OB sei senkrecht auf m. Eine Linie durch N parallel zu AB schneidet dann den Kreis in dem Berührungspunkt N_1 der gesuchten Tangente; OS ist nämlich senkrecht auf AB, also auch auf NN_1.

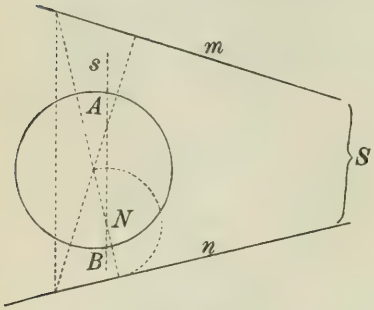


Fig. 107.

2. Beispiel: An einen Kreis sollen die Tangenten aus dem unzugänglichen Schnittpunkt S zweier gegebenen Linien m und n gelegt werden. (Fig. 107.)

Man bestimme den Pol N der Linie n bezüglich des Kreises. Die Polare s von S muß dann durch N hindurchgehen und senkrecht zu dem durch S hindurchgehenden Durchmesser sein. Man konstruiert sie also ähnlich wie NN_1 in dem vorhergehenden Beispiel. s schneidet dann den Kreis in den Berührungspunkten A und B der gesuchten Tangenten.

Vgl. P. Zühlke, *Konstruktionen in begrenzter Ebene* (Mathem. Bibl. Bd. XI). Leipzig 1913. Hier findet man auch die weitere Literatur angegeben.

Sechstes Kapitel.

Kegelschnitte.

Einleitende Sätze.

116. Jede Schnittkurve eines Rotationskegels mit einer eigentlichen Ebene, die nicht durch die Spitze des Kegels geht, heißt ein *Kegelschnitt.*

Das Wort Schnittkurve bezeichnet hier die Gesamtheit aller Punkte (auch der unendlich fernen Punkte), welche der Kegel mit der Ebene gemein hat. Da der Kegel den Inbegriff aller Punkte bedeutet, die auf den Seitenlinien (die unendlich fernen Punkte einbegriffen) liegen, kann jeder Punkt auf dem Kegelschnitt bestimmt werden als Schnittpunkt der Ebene mit einer Seitenlinie des Kegels. Der Punkt ist unendlich fern, wenn die Ebene der Seitenlinie parallel ist; die Schnittkurve hat also höchstens zwei unendlich ferne Punkte, kann aber auch nur einen einzigen oder keinen unendlich fernen Punkt enthalten. Um diese verschiedenen Fälle bequem darstellen zu können, benützen wir die durch die Kegelachse (a) senkrecht zur Schnittebene (Σ) gelegte Ebene Π als Zeichenebene. In dieser Ebene zeichnen wir die Achse a, die beiden Seitenlinien e und e_1 des Kegels, und die Spur s der Ebene Σ (Fig. 108—110). Der ganze Kegel wird nun senkrecht auf die Zeichenebene innerhalb der beiden Winkel projiziert, die von e und e_1 begrenzt werden und die Achse a enthalten. Sowohl der Kegel wie auch die Schnittebene wird von der Zeichenebene symmetrisch geteilt, und die Gerade s wird somit eine Symmetrieachse der Schnittkurve.

117. Wir betrachten nun nacheinander die drei in den Figuren dargestellten Fälle:

Erster Fall: s schneidet e und e_1 in zwei Punkten A und A_1, welche demselben Kegelmantel angehören (Fig. 108). Die Schnittkurve hat keinen unendlich fernen Punkt, weil es keine Seitenlinie gibt, deren Projektion zu s parallel ist. Wir zeichnen nun

zwei Kreise, welche e, e_1 und s berühren und deren Mittelpunkte auf a liegen, und wählen für die Berührungspunkte die in der Figur angegebenen Bezeichnungen PQ, P_1Q_1, FF_1. Man sieht dann ganz wie früher bei der Untersuchung des Zylinderschnittes (22), daß die von PQ durch Drehung um a beschriebene Kegelzone der Ort aller Punkte ist, für welche die Längen der Tangenten an die von den beiden Kreisen beschriebenen Kugeln die konstante Summe PQ haben. Die gesuchte Schnittkurve ist nun ganz in dieser Zone enthalten und wird somit nach 22 eine Ellipse mit den Brennpunkten F, F_1 und der großen Achse AA_1. Die ganze Kurve wird senkrecht auf die Ebene Π in die Strecke AA_1 projiziert.

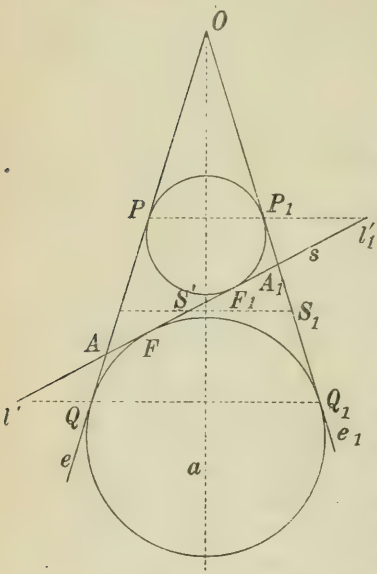


Fig. 108.

Ein beliebiger Punkt S der Ellipse werde nun in S' projiziert und falle, um a in die Zeichenebene umgeklappt, nach S_1 ($S'S_1 \perp a$). Die wahren Längen seiner Brennstrahlen sind dann $P_1S_1 = SF_1$ und $S_1Q_1 = SF$.

Die geraden Linien l und l_1, welche sich in die Schnittpunkte l' und l_1' von s mit den Geraden QQ_1 und PP_1 projizieren, sind in der Ellipsenebene enthalten und werden als *Leitlinien* der Ellipse bezeichnet.

Es wird nun

$$SF = S_1Q_1,\ Sl = S'l',$$

also

$$\frac{SF}{Sl} = \frac{S_1Q_1}{S'l'} = \frac{A_1Q_1}{A_1l'},$$

d. h. *das Verhältnis der Abstände des beliebigen Punktes S der Ellipse von dem Brennpunkte F und von der Leitlinie l ist konstant.*

Indem wir das konstante Verhältnis mit e bezeichnen, haben wir:

$$e = \frac{A_1F}{A_1l} = \frac{AF}{Al} = \frac{A_1F - AF}{A_1l - Al},$$

wobei die Strecken numerisch gerechnet sind, also

$$e = \frac{FF_1}{AA_1} .$$

Die Zahl e, die immer < 1, wird als die *Exzentrizität* der Ellipse bezeichnet.

Es ist klar, daß auch die Abstände SF_1 und Sl_1 das konstante Verhältnis e haben.

Zweiter Fall: s schneidet e und e_1 in zwei Punkten A und A_1, welche verschiedenen Kegelmänteln angehören (Fig. 109). Die Schnittkurve enthält jetzt zwei unendlich ferne Punkte, indem der Kegel zwei Seitenlinien enthält, deren gemeinsame Projektion zu s parallel ist.

Die Kurve wird eine *Hyperbel* genannt; sie projiziert sich in die beiden Halbstrahlen, die durch Verlängerung der Strecke AA_1 entstehen, und besteht daher aus zwei Ästen, die beide sich ins unendlich Ferne erstrecken.

Bewegt sich ein Punkt S stetig auf der Hyperbel derart, daß sein Abstand OS vom Kegelscheitel und also auch sein Abstand von irgendeinem anderen fest gewählten Punkt R ins Unendliche wächst, dann wird die Richtung OS und somit auch die Richtung RS sich einer Grenzlage nähern, welche einen unendlich fernen Punkt der Hyperbel darstellen muß.

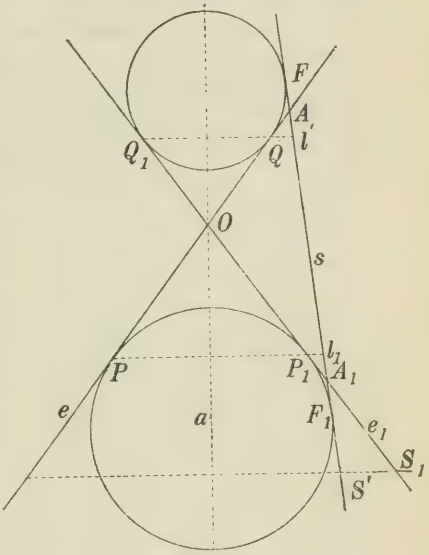


Fig. 109.

Um die eigentlichen Punkte der Kurve zu untersuchen, stellen wir ganz ähnliche Überlegungen an wie im vorigen Falle: Wir zeichnen die beiden Kreise, die e, e_1 und s berühren und ihre Mittelpunkte auf a haben. Die vier Halbstrahlen, die durch Verlängerung der Strecken PQ und P_1Q_1 entstehen, werden von den Punkten erfüllt, deren Tangentialentfernungen von den beiden Kreisen die konstante Differenz PQ haben. Die von den genannten Halbstrahlen durch Drehung um a beschriebenen Teile der Kegel-

fläche werden also alle Punkte im Raum enthalten, deren Tangentialentfernungen von den beiden von den Kreisen beschriebenen Kugeln dieselbe konstante Differenz haben. Die gesuchte Kurve wird daher, was ihre eigentlichen Punkte anbetrifft, der Ort aller Punkte ihrer Ebene, deren Abstände von den festen Punkten FF_1 die konstante Differenz $PQ = AA_1$ haben. F und F_1 heißen die *Brennpunkte* der Hyperbel, A und A_1 ihre *Scheitel;* die Symmetrieachse AA_1 heißt ihre *Hauptachse* (bisweilen wird auch die Länge AA_1 Hauptachse genannt). Die Mittelsenkrechte von FF_1 (und AA_1) ist auch eine Symmetrieachse der Kurve und wird die *Nebenachse* genannt.

Die Leitlinien l und l_1 werden ganz wie bei der Ellipse bestimmt und die entsprechende Eigenschaft aufgestellt und bewiesen. Die Exzentrizität $\frac{FF_1}{AA_1}$ wird hier > 1.

Es ist leicht zu zeigen, daß in einer gegebenen Ebene eine Hyperbel dadurch bestimmt werden kann, daß zwei beliebig gewählte (verschiedene) Punkte F, F_1 ihre Brennpunkte sein sollen, während die Hauptachse AA_1 eine beliebig vorgeschriebene Länge ($< FF_1$) hat.

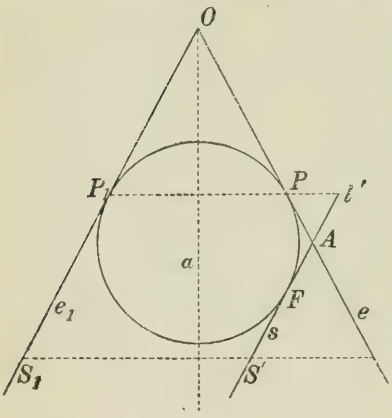


Fig. 110.

Dritter Fall: s schneidet e in dem Punkte A und ist zu e_1 parallel (Fig. 110). Die Kurve hat einen und nur einen unendlich fernen Punkt, der in der gemeinsamen Richtung von s und e_1 liegt. Die ganze Kurve projiziert sich in einen Halbstrahl von s und wird eine *Parabel* genannt.

Um ihre eigentlichen Punkte zu untersuchen, zeichnen wir den die Geraden e, e_1, s berührenden Kreis, dessen Mittelpunkt auf a liegt. Die Berührungspunkte seien P, P_1 und F. Durch Drehung um a beschreibt der Kreis eine Kugel, welche den Kegel in einem Kreis mit dem Durchmesser PP_1 berührt. Diese Kugel berührt die Schnittebene im Punkte F. Wir betrachten nun die Gerade l, deren Projektion auf die Zeichenebene nach dem Schnittpunkt l' von s mit PP_1 fällt. Diese Gerade liegt in der Schnittebene und ist senkrecht zu s. Wird nun S durch Drehung um a

in die Lage S_1 auf e_1 herumgedreht ($S'S_1 \perp a$), so werden die Tangentialentfernungen der beiden Punkte S und S_1 von der Kugel gleich groß und es wird $SF = S_1P_1$; es ist aber $S_1P_1 = S'l' = Sl$, also wird $SF = Sl$, d. h. *ein beliebiger Punkt der Schnittkurve ist von F und l gleich weit entfernt.* Umgekehrt muß jeder Punkt der Schnittebene, welcher gleich weit von F und l entfernt ist, auch zur Schnittkurve gehören.

F wird der *Brennpunkt* der Parabel genannt, l ihre *Leitlinie*, s ihre *Achse* und A ihr *Scheitel*.

Es ist sehr einfach zu zeigen, daß eine Parabel dadurch bestimmt werden kann, daß ein beliebig gewählter Punkt F ihr Brennpunkt, und eine beliebig angenommene Gerade l, die nicht durch F geht, ihre Leitlinie sein soll.

118. *Tangente* an einen Kegelschnitt heißt eine gerade Linie, die in der Ebene des Kegelschnittes liegt und nur einen Punkt P (den *Berührungspunkt*) mit dem Kegelschnitt gemein hat. Die Tangente muß also in der Tangentialebene des Kegels längs der Seitenlinie, die durch den betrachteten Punkt P der Kurve geht, liegen; sie ist somit die Grenzlage einer geraden Linie, welche P mit einem anderen gegen P konvergierenden Kurvenpunkt verbindet. Ist der Berührungspunkt unendlich fern, so heißt die Tangente eine *Asymptote. Die Hyperbel hat also zwei Asymptoten; in diesen wird die Schnittebene von den Tangentialebenen des Kegels längs den zwei Seitenlinien, die zur Schnittebene parallel sind, getroffen.* Jede der Asymptoten ist also Grenzlage einer Tangente, deren Berührungspunkt sich ins Unendliche entfernt. Da die Parabel nur einen unendlich fernen Punkt besitzt, hat sie auch nur eine Asymptote, aber diese ist unendlich fern, da die Tangentialebene längs der Seitenlinie e_1 (s. Fig. 110), die der Schnittebene parallel ist, diese in einer unendlich fernen Linie schneidet. *Die Parabel berührt also die unendlich ferne Linie ihrer Ebene, und der Berührungspunkt wird durch die Richtung der Symmetrieachse s dargestellt.*

119. Wenn man für einen beliebigen Punkt S einer Ellipse (Fig. 111) den einen Brennstrahl F_1S um ein Stück SK gleich dem anderen Brennstrahl SF über S hinaus verlängert, so erhält man die Strecke F_1K, deren Länge gleich der großen Achse ist.

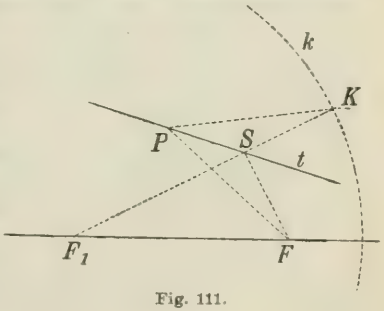


Fig. 111.

Zeichnet man also den Kreis k mit dem Mittelpunkt F_1, dessen Radius gleich der großen Achse ist, so kann man die Ellipse dadurch charakterisieren, daß ihre Punkte alle gleich weit von F und k abstehen. Wir nennen k den zu F gehörenden *Leitkreis*. F liegt innerhalb k.

Auf dieselbe Weise kann man bei der Hyperbel zu dem einen Brennpunkt F einen *Leitkreis* k um F_1 beschreiben (Fig. 112), dessen Radius der Hauptachse der Hyperbel gleich ist. Die Hyperbel wird dann, was ihre eigentlichen Punkte anbetrifft, der Ort aller Punkte der Ebene, die von F und k gleich weit abstehen[1]). F liegt jetzt außerhalb k.

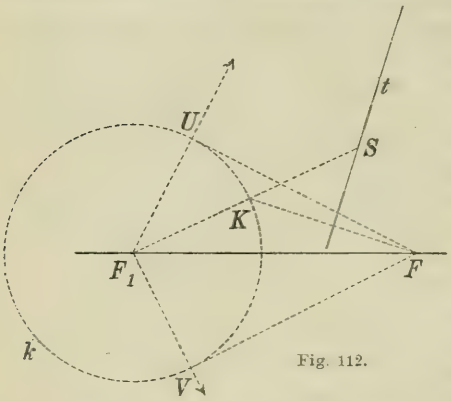


Fig. 112.

Wählt man einen Punkt K auf dem Kreise k, so findet man den entsprechenden Punkt S der Hyperbel, indem man die Gerade F_1K mit der Mittelsenkrechten t zu KF zum Schnitt bringt. Nähert sich K einem der Berührungspunkte U und V der beiden von F aus an den Kreis k gelegten Tangenten, so rückt S in unendliche Entfernung, und die Richtungen F_1U und F_1V bestimmen somit nach 117 die beiden unendlich fernen Punkte der Hyperbel.

Endlich wird man auch die Parabel in ähnlicher Weise erzeugen können, indem der Leitkreis unendlich groß und mit der Leitlinie der Parabel zusammenfallend angenommen wird.

120. Die gewonnenen Resultate sind sehr wichtig, wenn wir *die Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einer beliebigen gezeichnet vorliegenden Kurve* bestimmen sollen. Man zeichnet dann den Leitkreis k, und durch Probieren mit dem Stechzirkel bestimmt man leicht die Punkte auf der gezeichneten Kurve, welche gleich weit von F und k abstehen.

121. Die Tangente im Punkte S läßt sich auch leicht gewinnen mit Hilfe der eben besprochenen Tatsachen. Es gilt nämlich in allen Fällen der Satz: *Die Tangente t eines eigentlichen*

1) Als Abstand eines Punktes von einem Kreise wird hier entweder der größte oder der kleinste Abstand von einem Kreispunkte bezeichnet.

Punktes S halbiert den Winkel zwischen den beiden gleich großen Abständen des Berührungspunktes S von dem Brennpunkt F und dem Leitkreis k.

Um dies zu zeigen, braucht man nur zu bemerken, daß kein anderer eigentlicher Punkt P als S auf der genannten Halbierungslinie dem Kegelschnitt angehören kann (s. Fig. 111). Es wird nämlich $PK = PF$, und PK kann nicht dem Abstande des Punktes P von dem Kreise gleich sein. Daß ferner die Halbierungslinie t keinen unendlich fernen Punkt mit der Kurve gemein hat, folgt für die Parabel einfach daraus, daß sie zur Achse der Parabel niemals parallel ist, und für die Hyperbel aus der oben angeführten Konstruktion der unendlich fernen Punkte der Hyperbel (119). Hierdurch ist der Satz vollständig bewiesen.

Wenn für die Hyperbel ein Punkt S in unendliche Entfernung rückt (s. Fig. 112), so nähert sich die Tangente t in S der entsprechenden Asymptote (118). Die beiden Asymptoten sind also die Mittelsenkrechten der Strecken FU und FV. Sie gehen somit durch den Mittelpunkt von FF_1, d. h. durch das Zentrum der Hyperbel.

122. Aus der angegebenen Tangentenkonstruktion schließt man nun weiter:

Die Gegenpunkte K des Brennpunktes F in bezug auf die verschiedenen Tangenten des Kegelschnittes liegen immer auf dem Leitkreis k.

Und: *Die Projektionen von F auf die Tangenten des Kegelschnittes fallen auf den Kreis über der großen Achse (der Hauptachse) als Durchmesser.*

Für die Parabel lautet jedoch der letzte Satz:

Die Projektionen von F auf die Tangenten der Parabel erfüllen eine zur Leitlinie k parallele Gerade, die gleich weit von F und k entfernt ist. Diese Gerade wird leicht als Scheiteltangente d. Parabel erkannt.

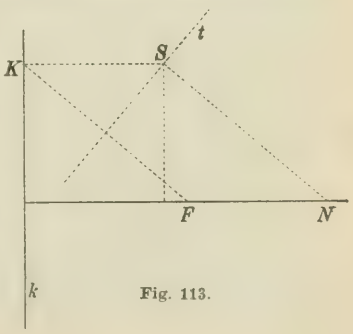


Fig. 113.

123. Für die Ellipse und Hyperbel läuft die in 121 genannte Tangentenbestimmung darauf hinaus, daß die Tangente den äußeren bzw. inneren Winkel der Brennstrahlen halbiert. Für die Parabel sei nur noch bemerkt, daß man, wenn der Brennpunkt F und die

Leitlinie k gegeben sind (Fig. 113), den beliebigen Punkt S der Parabel mit der zugehörigen Tangente t konstruieren kann, wenn man K beliebig auf k annimmt, die Mittelsenkrechte t von FK konstruiert und den Schnittpunkt S von t mit dem auf k in K errichteten Lot bestimmt.

Die Normale in S ist zu FK parallel und schneidet die Achse der Parabel in einem Punkte N derart, daß $SN \# KF$ wird. Die Projektion von SN auf die Achse wird *Subnormale* genannt. Diese Subnormale ist also gleich dem Abstand der Leitlinie von dem Brennpunkt.

Dieser Abstand wird als der *Parameter* der Parabel bezeichnet.

Allgemeine Eigenschaften der Kegelschnitte.

124. *Jeder Kegelschnitt kann durch Zentralprojektion aus einem Kreis erzeugt werden.*

Ein ebener Schnitt eines Rotationskegels ist nämlich die Zentralprojektion jedes Kreises auf dem Kegel für die Spitze des Kegels als Projektionszentrum. Ein Punkt des Kreises samt der zugehörigen Tangente wird in einen Punkt des Kegelschnittes samt der zugehörigen Tangente projiziert. Eine gerade Linie, die den Kreis in zwei Punkten schneidet, wird in eine gerade Linie projiziert, die den Kegelschnitt in zwei Punkten schneidet. Ein Punkt innerhalb (außerhalb) des Kegelschnittes ist ein solcher, der bei der Projektion aus einem Punkt innerhalb (außerhalb) des Kreises entsteht. Von jedem Punkt außerhalb des Kegelschnittes können also zwei Tangenten an die Kurve gezogen werden, während durch einen Punkt innerhalb des Kegelschnittes keine Tangente geht.

Manche der in dem fünften Kapitel auseinandergesetzten Eigenschaften des Kreises können nun sofort auf einen beliebigen Kegelschnitt übertragen werden, indem man diesen als die Zentralprojektion eines Kreises betrachtet. Wir nennen zuerst und vor allem die Sätze von Pascal und Brianchon.

125. *Pascalscher Satz: Bei einem beliebigen, einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechseck liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer geraden Linie (Pascalschen Geraden).*

Der Satz gilt auch für solche Sechsecke, bei denen zwei aufeinanderfolgende Ecken in einem Punkt zusammenfallen, indem dann die Tangente in diesem Punkt als eine Seite des Sechsecks betrachtet wird. Dieses kann in demselben Sechseck bis zu dreimal eintreten. Der Beweis für den Satz folgt sofort aus dem bereits bewiesenen analogen Satz für den Kreis (96), indem man

den Kegelschnitt durch Zentralprojektion aus dem Kreis hervorgehen läßt.

126. *Anwendungen des Pascalschen Satzes:*

1. *Kennt man fünf Punkte A, B, C, D, E eines Kegelschnittes, so kann man den unbekannten Schnittpunkt F des Kegelschnittes mit einer willkürlich gegebenen Linie 1 durch A finden* (Fig. 114).

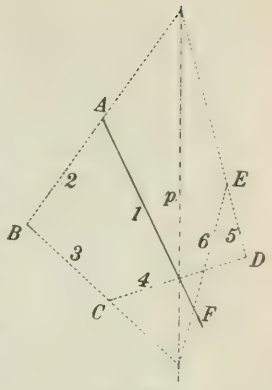


Fig. 114.

Man benützt 1 als Seite in einem einbeschriebenen Sechseck, dessen Ecken A, B, C, D, E und F sind. Man kennt die fünf Seiten 1, 2, 3, 4 und 5 und soll die Seite 6 finden. Dies geschieht, indem man die Schnittpunkte (1, 4) und (2, 5) durch die Linie p verbindet und durch deren Schnittpunkt mit 3 die Gerade nach E zieht. Dies ist die Seite 6, und 6 und 1 schneiden sich in dem gesuchten Punkt F. Läßt man 1 sich um A drehen, so durchläuft F den Kegelschnitt.

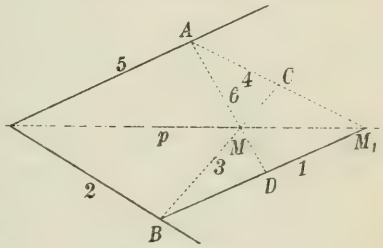


Fig. 115.

Ein Kegelschnitt ist also vollständig bestimmt durch fünf Punkte oder durch vier Punkte und die Tangente in einem oder durch drei Punkte und die Tangenten in zweien von ihnen. Der letzte Fall ist in Fig. 115 behandelt, wo A, B und C die drei gegebenen Punkte sind. Die gegebenen Tangenten in A und B sind mit 5 und 2 bezeichnet. Durch B ist eine Linie 1 gezogen, deren zweiter Schnittpunkt D mit dem Kegelschnitt bestimmt wird, indem man den Schnittpunkt M_1 von 1 und AC (d. h. 4) mit dem Schnittpunkt von 2 und 5 durch die Linie p verbindet und aus A die Linie 6 nach dem Schnittpunkt M von p und BC (d. h. 3) zieht; 6 und 1 schneiden sich dann in dem gesuchten Punkt D.

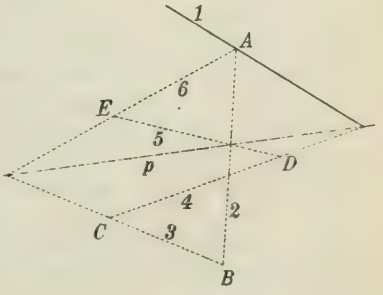


Fig. 116.

2. *Von einem Kegelschnitt kennt man fünf Punkte A, B, C, D*

und E. Die Tangente in A zu finden (Fig. 116). Das einbeschriebene Sechseck $AABCDE$ habe die Seiten 1, 2, 3, 4, 5 und 6, von denen 1 die unbekannte Tangente ist. Die Pascalsche Linie p, die (3, 6) und (2, 5) verbindet, schneidet 4 in einem Punkt, dessen Verbindungslinie mit A die gesuchte Tangente liefert.

127. *Brianchonscher Satz: Bei einem beliebigen, einem Kegelschnitt umschriebenen Sechseck gehen die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken durch denselben Punkt (Brianchonschen Punkt).*

Der Satz gilt auch, wenn die aufeinanderfolgenden Seiten in eine Linie zusammenfallen, indem man den Berührungspunkt dieser Linie als eine Ecke des Sechsecks ansieht. Der Satz wird genau ebenso wie der Pascalsche Satz bewiesen.

128. *Anwendungen des Brianchonschen Satzes:*

1. *Man kennt fünf Tangenten a, b, c, d und e eines Kegelschnittes. Durch einen gegebenen Punkt 1 auf a soll die zweite Tangente f gelegt werden* (Fig. 117). Die sechs Tangenten werden als die Seiten eines umschriebenen Sechseckes angesehen, von welchem man fünf Ecken 1, 2, 3, 4 und 5 kennt und weiß, daß die Ecke 6 auf e liegen muß. Die Linien 1 4 und 2 5 schneiden einander in dem Brianchonschen Punkt. Die Verbindungslinie von diesem und 3 trifft e in 6. 1 6 ist dann die gesuchte Tangente.

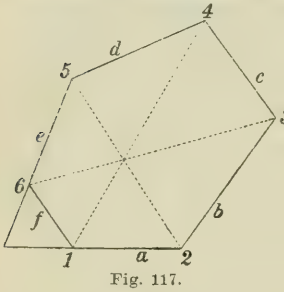


Fig. 117.

Aus der Konstruktion geht hervor, daß ein Kegelschnitt vollständig bestimmt ist durch fünf seiner Tangenten oder auch durch vier Tangenten und den Berührungspunkt einer von diesen oder durch drei Tangenten und die Berührungspunkte zweier von ihnen.

2. *Man kennt fünf Tangenten a, b, c, d und e eines Kegelschnittes. Den Berührungspunkt von a zu finden* (Fig. 118). a wird als zwei zusammenfallende Seiten in einem umschriebenen Sechseck angesehen, dessen übrige Seiten b, c, d und e sind. Der unbekannte Berührungspunkt 1 wird dann eine Ecke des Sechseckes. Die übrigen Ecken seien der Reihe nach 2, 3, 4, 5 und 6. Man verbindet dann 4 mit dem Schnittpunkt von 2 5 und 3 6, diese Linie schneidet den gesuchten Punkt 1 aus.

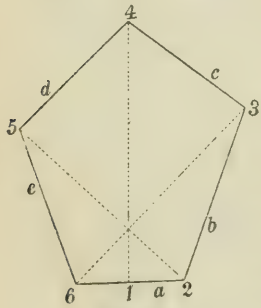


Fig. 118.

129. *Satz vom umschriebenen Viereck: In einem beliebigen, einem Kegelschnitt umschriebenen Viereck gehen die Diagonalen und die Verbindungslinien der Berührungspunkte gegenüberliegender Seiten durch denselben Punkt* (Fig. 119).

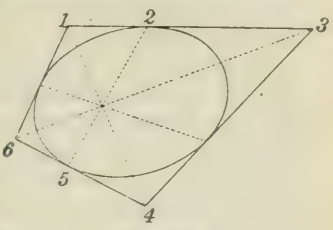


Fig. 119.

Denn in dem Sechseck 1 2 3 4 5 6, das durch das Viereck zusammen mit den Berührungspunkten zweier gegenüberliegender Seiten gebildet wird, schneiden sich die Linien 1 4, 2 5 und 3 6 in einem Punkt, und durch diesen Punkt muß aus dem gleichen Grunde auch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden anderen einander gegenüberliegenden Seiten hindurchgehen. Kennt man also drei Tangenten a, b und c mit den Berührungspunkten A, B und C, so kann man eine beliebige neue Tangente d und ihren Berührungspunkt D finden (Fig. 120), indem man einen Punkt O auf AC annimmt, ihn mit dem Schnittpunkt P von a und b und mit dem Schnittpunkt Q von b und c verbindet. Die Schnittpunkte P_1 und Q_1 dieser Verbindungslinien mit c und a liefern durch ihre Verbindungslinie eine neue Tangente des Kegelschnittes, deren Berührungspunkt auf der Geraden BO liegt.

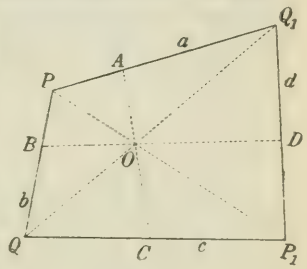


Fig. 120.

130. Da zwei harmonische Punktepaare bei der Zentralprojektion wieder zwei harmonische Punktepaare liefern, so können die Hauptsätze über Pol und Polare für den Kreis sofort auf einen beliebigen Kegelschnitt übertragen werden.

1. Zu einem beliebigen Punkt P in der Ebene des Kegelschnittes (aber nicht auf dem Kegelschnitt selbst) gehört eine bestimmte Polare, deren Punkte P_1 zu P bezüglich der Schnittpunkte des Kegelschnittes mit einer geraden Linie durch P harmonisch sind. Betrachtet man zugleich jede Tangente als die Polare ihres Berührungspunktes, so bekommt jeder Punkt in der Ebene des Kegelschnittes eine bestimmte Polare, ebenso wie auch jede gerade Linie in der Ebene einen bestimmten Pol besitzt.

Wenn ein Punkt auf der Polare eines anderen Punktes liegt, so liegt dieser andere Punkt auch auf der Polare des ersten Punktes. Die beiden Punkte heißen dann *konjugiert*. Zwei gerade Linien

heißen *konjugiert*, wenn die eine durch den Pol der anderen geht. — Wenn ein Punkt eine gerade Punktreihe durchläuft, so beschreibt seine Polare einen Strahlenbüschel, der zu der Punktreihe projektiv ist.

Ist der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, so wird der Pol der unendlich fernen Linie ein eigentlicher Punkt, der *Mittelpunkt* des Kegelschnittes. Die Polare eines unendlich fernen Punktes, der nicht auf dem Kegelschnitt liegt, wird ein *Durchmesser*, d. h. eine Linie, welche die Mittelpunkte aller in der Richtung nach dem Punkte hin gezogenen Sehnen enthält. Alle Durchmesser gehen durch den Mittelpunkt. Die Polare eines unendlich fernen Punktes auf dem Kegelschnitt wird eine Asymptote.

Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so wird die unendlich ferne Linie eine Tangente von ihm. Ihr Pol fällt dann in den unendlich fernen Punkt der Parabel. Die Polare für jeden anderen unendlich fernen Punkt wird ein Durchmesser. Alle Durchmesser sind parallel und laufen nach dem unendlich fernen Punkt der Parabel hin. Der Durchmesser, der die Polare des unendlich fernen Punktes in der Richtung senkrecht zu den Durchmessern ist, ist die Achse der Parabel.

2. Die früher gefundene Konstruktion für die Polare eines Punktes bezüglich eines Kreises kann direkt auf einen beliebigen Kegelschnitt übertragen werden. *In einem beliebigen, einem Kegelschnitt einbeschriebenen vollständigen Viereck ist also jeder Diagonalpunkt der Pol für die Verbindungslinie der beiden anderen Diagonalpunkte.* Die Diagonalpunkte sind deshalb paarweise konjugiert.

Aus Fig. 115 können wir durch Betrachtung des vollständigen Vierecks $ABCD$ folgende Konstruktion für die konjugierten Punkte bezüglich eines Kegelschnittes ableiten: *Wenn man aus zwei Punkten A und B des Kegelschnittes einen dritten Punkt C des Kegelschnittes auf eine Linie p projiziert, die der Verbindungslinie der Punkte A und B konjugiert ist (sie geht nämlich durch den Pol von AB), so erhält man ein Paar konjugierter Punkte M, M_1.*

3. *Satz über konjugierte Punktepaare: Die konjugierten Punktepaare auf einer geraden Linie, die keine Tangente des Kegelschnittes ist, bilden eine Involution. Wenn die Linie den Kegelschnitt schneidet, so sind die Schnittpunkte Doppelpunkte der Involution.* Dieser Satz, der aus dem entsprechenden Satz für den Kreis (111) sofort abgeleitet werden kann, wird benutzt, um die Schnittpunkte einer geraden Linie mit dem Kegelschnitt zu finden, indem man auf der Linie die Involution der bezüglich des Kegelschnittes kon-

jugierten Punkte bestimmt. Hat man zwei Paare konjugierter Punkte AA_1 und BB_1 gefunden, so können die Doppelpunkte nach der früher angegebenen Methode (102) konstruiert werden.

4. *Konjugierte Strahlenpaare, die durch einen nicht auf dem Kegelschnitt liegenden Punkt hindurchgehen, bilden einen involutorischen Strahlenbüschel. Hat der Büschel Doppelstrahlen, so sind diese Tangenten des Kegelschnittes* (112). Bei der Ellipse und der Hyperbel kann man von konjugierten Strahlen durch den Mittelpunkt (konjugierten Durchmessern) sprechen. Diese bilden sonach einen involutorischen Strahlenbüschel. Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so sind die Asymptoten Doppelstrahlen dieses Büschels. Jedes Paar konjugierter Durchmesser ist dann mit den Asymptoten harmonisch verbunden. Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so finden sich in dem Büschel keine Doppelstrahlen. Ellipse und Hyperbel besitzen ein Paar konjugierter Durchmesser, die aufeinander senkrecht sind; diese Durchmesser sind die Achsen des Kegelschnittes.

Die Ellipse.

131. Wir haben früher (21) gezeigt, wie man eine Ellipse mit den Halbachsen OA und OB mit Hilfe von zwei Kreisen mit dem Mittelpunkt O und den Radien OA und OB konstruieren kann (Fig. 121). Ein beliebiger Strahl durch O schneide die beiden Kreise in P_1 und P_2; durch P_2 zieht man die Parallele zu OA und durch P_1 die Parallele zu OB, diese beiden Parallelen schneiden sich in einem Punkte P der Ellipse. P und P_1 sind entsprechende Punkte in einer perspektiven Affinität mit der Affinitätsachse OA, und die Ellipse wird durch diese Affinität aus dem größten der beiden erwähnten Kreise abgeleitet.

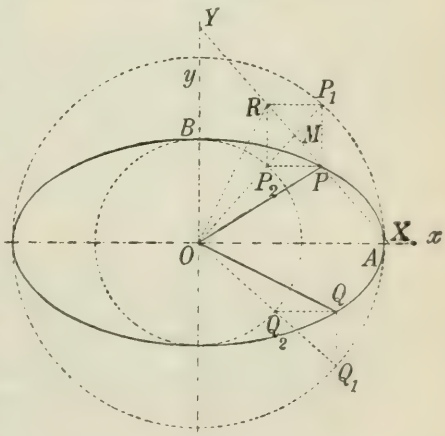


Fig. 121.

Zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse entsprechen hierbei zwei zueinander senkrechten Durchmessern des Kreises.

In der Figur ist $OQ_1 \perp OP_1$; OQ und OP sind dann ein Paar konjugierter Halbmesser der Ellipse. Dreht man nun die Figur OQ_2Q_1Q um einen rechten Winkel herum, so daß Q_1 nach P_1, Q_2 nach P_2 fällt, dann gelangt Q in eine solche Lage R, daß $P_1R \parallel OA$, $P_2R \parallel OB$ und $OR \perp OQ$ wird. Schneidet nun PR die Achsen OA und OB der Ellipse in X und Y, so liegt der Mittelpunkt M des Rechtecks RP_1PP_2 in der Mitte zwischen X und Y. Da $XP = OP_2 = OB$, $XR = OP_1 = OA$, finden wir folgende Konstruktion für die Achsen der Ellipse, wenn ein Paar konjugierter Halbmesser OQ und OP gegeben ist: OQ dreht man um einen rechten Winkel in die Lage OR, auf PR trägt man vom Mittelpunkt M aus $MX = MY = MO$ ab, dann werden OX und OY die Achsenlinien und die Längen der Halbachsen gleich XP und XR oder YP. Man beachte, daß die große Achse immer in dem spitzen Winkel zwischen den gegebenen Durchmessern liegt.

132. *Wenn eine Strecke XY von konstanter Länge mit ihren Endpunkten auf zwei zueinander senkrechten Achsen x und y gleitet, so beschreibt ein beliebiger Punkt P auf der Linie XY eine Ellipse, deren Halbachsen die Längen PX und PY haben. Die Achsenlinien der Ellipse sind x und y.* Man erkennt dies sofort aus der vorigen Figur, wenn man nur bedenkt, daß die Strecke XY, die ja gleich der Summe der Halbachsen ist, eine konstante Länge haben muß.[1]) Läßt man umgekehrt X, Y und P feste Punkte sein, während der rechte Winkel xy sich so bewegt, daß seine Schenkel immer durch die Punkte X und Y hindurchgehen, so werden die Punkte der Ebene von xy, die nacheinander durch P hindurchgehen, eine Ellipse erfüllen. Dies wird in der Praxis beim sogenannten Ovalwerk[2]) benutzt, d. h. bei der Vorrichtung, die mit Hilfe einer Drehbank einen Körper so zu ge-

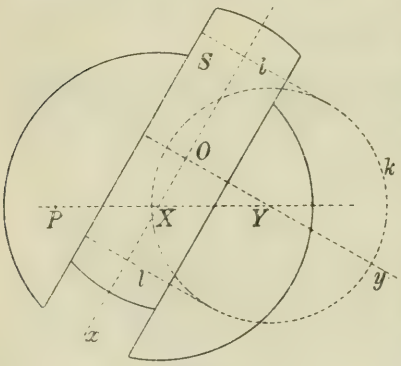


Fig. 122.

1) Der Fall, wo P auf der Verlängerung von XY liegt, wird berücksichtigt, indem man in der Figur den Punkt P_2 in die diametral gegenüberliegende Lage überführt.

2) Vgl. z. B. F. Reuleaux, Lehrbuch der Kinematik, Braunschweig 1875, S. 316 und S. 336.

stalten erlaubt, daß seine Querschnitte Ellipsen werden (vgl. Fig. 122). Der Körper wird an einem Schlitten S befestigt, dessen Symmetrielinien x und y gezwungen sind, durch die Punkte X und Y hindurchzugehen. Dies geschieht, indem der Schlitten zwischen zwei Kulissen auf einer um X rotierenden Scheibe gleitet, während gleichzeitig zwei Arme, die vom Schlitten ausgehen, um eine Scheibe mit dem festen Zentrum Y greifen, so daß die Linien l auf dem Schlitten gezwungen werden, den Kreis k beständig zu berühren.

Hält man nun den Stahl am Punkt P fest, so werden die Punkte des Körpers, die nacheinander den Stahl passieren, auf einer Ellipse liegen.

133. Zur Konstruktion der Punkte und Tangenten einer Ellipse, von der ein Paar konjugierter Durchmesser AB und CD gegeben ist, benutzt man den Satz vom umschriebenen Viereck (129), indem man die Tangenten a, b und c in A, B und C für die drei ersten Seiten und eine beliebige neue Tangente t für die vierte Seite in einem umschriebenen Viereck 1 2 3 4 wählt (Fig. 123). Auf AC nimmt man einen Punkt M an; $1M$ schneide c in 3 und $2M$ schneide a in 4. 3 4 ist dann die gesuchte Tangente t. Ihr Berührungspunkt T liegt auf BM.

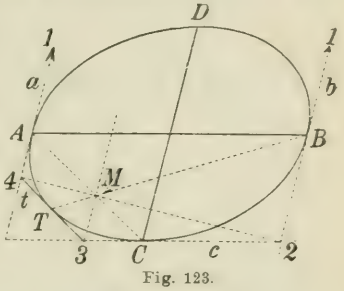


Fig. 123.

Aus dieser Konstruktion folgt, daß *eine Ellipse bei einer beliebigen Parallelprojektion, bei welcher die Ebene der Ellipse nicht von Projektionsstrahlen erfüllt wird, in eine neue Ellipse projiziert wird.* T und t werden nämlich als Punkt und Tangente der Ellipse projiziert, für welche die Projektionen von AB und CD ein Paar konjugierter Durchmesser sind.

Auf dieselbe Weise sieht man, daß das affin perspektive Bild einer Ellipse wieder eine Ellipse ist.

134. Sucht man das affin perspektive Bild eines Kreises, indem man für die Affinitätsachse einen Kreisdurchmesser AB wählt, so kann man folgende Konstruktion anwenden (Fig. 124). Der zu AB senkrechte Kreishalbmesser OD_1 gehe in OD über, dann lege man an eine beliebige Ordinate M_0M_1 des Kreises das zu OD_1D ähnliche Dreieck M_0M_1M an, so werden die

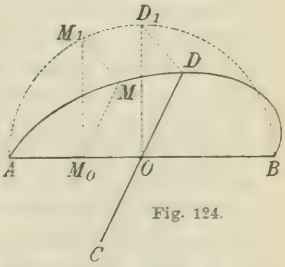


Fig. 124.

Punkte M die entstehende Ellipse erfüllen. Von dieser Ellipse sind OB und OD zwei konjugierte Halbmesser.

Auf solche Weise kann man manche Aufgaben über Ellipsen in Aufgaben über Kreise verwandeln. So kann man die Schnittpunkte der Ellipse mit einer geraden Linie l bestimmen, indem man die Schnittpunkte des entsprechenden Kreises mit der entsprechenden Linie l_1 sucht.

135. Eine andere perspektive Affinität, bei welcher die Ellipse einem Kreise entspricht, zeigt Fig. 125. AB und CD

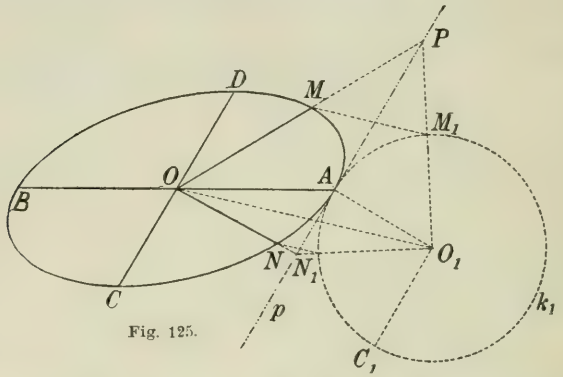


Fig. 125.

sind konjugierte Durchmesser der Ellipse. Der Kreis k_1 ist so gezeichnet, daß er die Ellipse in A berührt und den Radius $AO_1 = OC$ besitzt. Dieser Kreis entspricht der Ellipse in einer perspektiven Affinität, von welcher die gemeinsame Tangente p in A die Achse und O, O_1 zwei homologe Punkte sind, denn in dieser Affinität muß die gegebene Ellipse einer anderen Ellipse entsprechen, welche die konjugierten Halbmesser O_1A (als OA entsprechend) und O_1C_1 (als OC entsprechend), wobei $O_1C_1 \neq OC$, besitzt, aber diese neue Ellipse fällt mit dem Kreis k_1 zusammen. Diese affine Transformation kann auf dieselbe Weise wie die vorige verwendet werden. In der Figur ist z. B. ein Schnittpunkt M der Ellipse mit der Durchmesserlinie OP bestimmt, indem durch den Schnittpunkt der entsprechenden Linie O_1P mit k_1 die Linie M_1M parallel zu O_1O gezogen ist. Zugleich ist der zu OM konjugierte Halbmesser ON dadurch bestimmt worden, daß der entsprechende Radius O_1N_1 des Kreises senkrecht zu O_1M_1 wird.

136. Wenn eine Ellipse e so parallel projiziert wird, daß ihre Ebene von Projektionsstrahlen erfüllt ist, dann wird ihre Projektion eine gerade Strecke. Wir wollen zeigen, wie man die

Endpunkte dieser Strecke findet, wenn die Projektionen $O'A'$ und $O'B'$ von zwei konjugierten Halbmessern der Ellipse gegeben sind (Fig. 126).

Der Kreis k' mit dem Mittelpunkt O' und dem Radius $O'B'$ werde als Projektion einer Ellipse k angesehen, die den Halbmesser OB mit e gemein hat und nicht mit e in einer Ebene liegt. k und e sind im Raume die Parallelprojektionen voneinander für die Projektionsrichtung AA_1, wobei A_1 dadurch bestimmt ist, daß OA_1 und OB konjugierte Halbmesser von k sind. Da so $O'A_1'$ und $O'B'$ konjugierte Durchmesser von k' werden, muß $O'A_1'$ senkrecht auf $O'B'$ sein. Ziehen wir also gerade Linien von allen Punkten auf k' parallel zu $A_1'A'$, so schneiden diese Linien $A'B'$ in den Projektionen der Punkte von e. Den einen Endpunkt M von der Projektion der Ellipse erhält man also, indem man die Tangente MN an k' parallel zu $A'A_1'$ zieht. Nun sind aber die rechtwinkligen Dreiecke $O'NM$ und $A_1'O'A'$ kongruent, da $O'A_1' = O'N$ und $\sphericalangle M = \sphericalangle A'$, mithin ist $O'M = A_1'A'$. *Die Hälfte der gesuchten Strecke findet man also als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, von welchem die Projektionen $O'A'$ und $O'B'$ der beiden konjugierten Halbmesser die Katheten sind.*

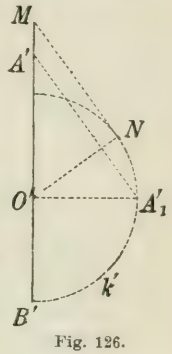


Fig. 126.

137. Der Kreis ist die einzige Ellipse, bei welcher alle konjugierten Durchmesser aufeinander senkrecht sind.

Wenn zwei Ellipsen so beschaffen sind, daß jedes Paar konjugierter Durchmesser in der einen parallel zu einem Paar konjugierter Durchmesser in der andern ist, so sind die Ellipsen ähnlich und in ähnlicher Lage. Projiziert man sie nämlich auf eine Ebene so, daß die Projektion der einen Ellipse ein Kreis wird, so muß auch die Projektion der anderen Ellipse ein Kreis werden. Den Satz kann man auch so ausdrücken: *Zwei Ellipsen, welche dieselben unendlich fernen konjugierten Punktepaare besitzen, sind ähnlich und in ähnlicher Lage.*

Die Parabel.

138. *Konstruktion einer Parabel, von welcher zwei eigentliche Punkte A und B, die Tangente a in A und ein Durchmesser AU gegeben sind* (Fig. 127).

Man sucht den zu B bezüglich a symmetrischen Punkt B_1, außerdem die Projektion B_2 von B auf AU. Die Mittelsenkrechte

von B_1B_2 schneide AU in einem Punkt M. Dann ist die Linie l, die in M senkrecht auf AU errichtet wird, die Leitlinie und der zu M bezüglich a symmetrische Punkt F der Brennpunkt für eine Parabel, welche die gegebenen Bedingungen erfüllt.

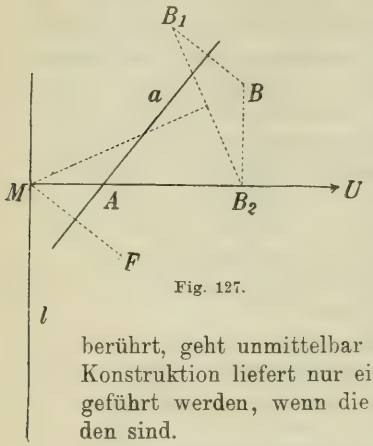


Fig. 127.

Die Parabel ist nämlich dadurch charakterisiert, daß die Abstände jedes ihrer Punkte von der Leitlinie und vom Brennpunkt gleich werden. Der Abstand des Punktes B von l ist aber $MB_2 = MB_1 = FB$. Die Parabel geht also durch B. Daß sie a in A berührt, geht unmittelbar aus der Konstruktion hervor. Die Konstruktion liefert nur eine Lösung und kann immer durchgeführt werden, wenn die Linien a, AB und AU verschieden sind.

Die Tangente in B kann man finden, indem man den Pol P von AB sucht (Fig. 128). P ist der Schnittpunkt von a und der Polare c des unendlich fernen Punktes auf AB. Aber diese Polare ist der Durchmesser, der die Sehnen von der Richtung AB halbiert, und ist deshalb durch den Mittelpunkt C von AB parallel zu AU zu ziehen. Die gesuchte Tangente b ist dann PB. Man sieht hieraus, *daß man immer eine Parabel bestimmen kann, die zwei gegebene nicht parallele Linien a und b in gegebenen (eigentlichen) Punkten A und B berührt, von denen keiner in den Schnittpunkt von a und b hineinfällt.*

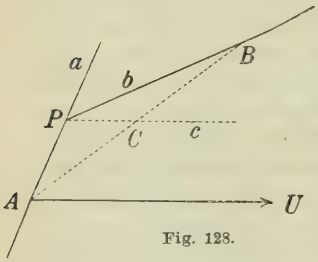


Fig. 128.

139. *Konstruktion der Punkte und Tangenten einer Parabel, wenn zwei Tangenten a und b mit den Berührungspunkten A und B gegeben sind* (Fig. 129).

Man wende den Satz vom umschriebenen Viereck an. a und b bilden das eine Paar gegenüberliegender Seiten, die unendlich ferne Linie und die gesuchte Tangente t das andere Seitenpaar in dem Viereck 1234. Auf AB wird ein Punkt M angenommen. Die Linien $M1$ und $M2$, d. h. die Parallelen durch M zu a und b bestimmen 3 und 4. 34 ist die gesuchte Tangente t und ihr Berührungspunkt T liegt auf der Verbindungslinie von M mit dem

unendlich fernen Punkt U der Parabel. Diese Verbindungslinie ist also parallel zu der Linie, die den Schnittpunkt von a und b mit dem Mittelpunkt der Strecke AB verbindet.

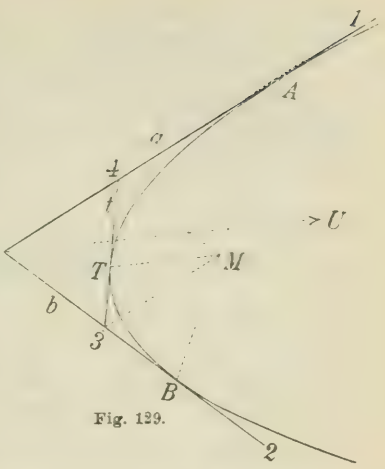


Fig. 129.

Die angegebene Konstruktion zeigt, daß *die Parallelprojektion einer Parabel eine neue Parabel ist, wenn ihre Ebene nicht von Projektionsstrahlen erfüllt wird.* T und t werden nämlich projiziert als Punkt und Tangente der Parabel, welche die Projektionen von a und b in den Projektionen von A und B berührt. Auf ähnliche Weise erkennt man, daß die affine Transformation einer Parabel eine neue Parabel liefert.

140. *Konstruktion der Schnittpunkte einer Parabel mit einer geraden Linie.*

1. Die Parabel sei gegeben durch die Punkte A und B, die Tangente 5 in A und den Durchmesser AU (Fig. 130). Die gegebene Linie 1 sei selbst ein Durchmesser der Parabel, also zu AU parallel.

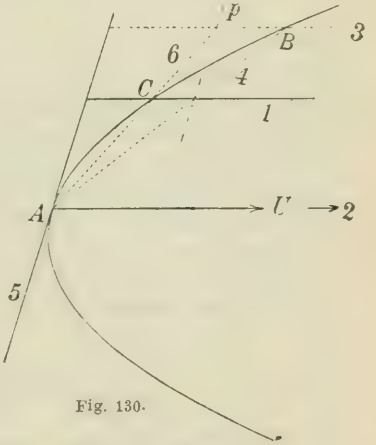


Fig. 130.

Da die Linie 1 durch den unendlich fernen Punkt U der Parabel geht, kann der gesuchte Schnittpunkt C mit Hilfe des Pascalschen Satzes gefunden werden, wenn man diesen auf ein Sechseck anwendet, dessen Seiten 1, 2 (die unendlich ferne Linie), 3 (UB), 4 (BA), 5 und die unbekannte Linie 6 (AC) sind. Die Pascalsche Linie p wird durch den Schnittpunkt von 1 und 4 parallel zu 5 gezogen, und 6 kann als die Verbindungslinie von A mit dem Schnittpunkt von 3 und p gefunden werden. Dadurch ist C bestimmt. Verschiebt man 1

parallel, so erhält man durch die angegebene Konstruktion eine einfache Bestimmung der Parabel.

2. Die Parabel sei gegeben durch die Tangenten a und b und deren Berührungspunkte A und B. Die gegebene Linie l sei willkürlich, aber kein Durchmesser (Fig. 131).

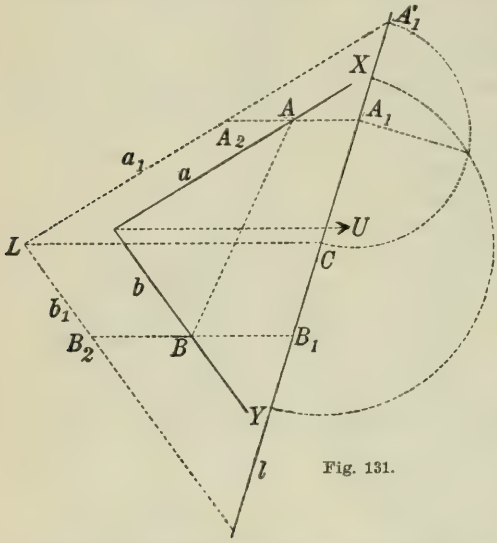


Fig. 131.

Die Durchmesser durch A und B mögen l in A_1 und B_1 schneiden. Die Polaren a_1 und b_1 dieser Punkte bestimmt man dadurch, daß sie parallel zu a und b sein sollen und die Durchmesser durch A und B in solchen Punkten A_2 und B_2 schneiden, daß $AA_2 = A_1A$, $BB_2 = B_1B$ wird. a_1 und b_1 schneiden einander in dem Pol L von l, und der Durchmesser durch L enthält den Mittelpunkt C der auf l ausgeschnittenen Sehne. C ist der Mittelpunkt der Involution, die von den konjugierten Punkten auf l gebildet werden, und da A_1 und A'_1 (der letztere Punkt ist der Schnittpunkt von a_1 und l) ein Paar konjugierter Punkte bilden, wird die mittlere Proportionale von CA_1 und CA'_1 gleich dem Abstand des Punktes C von den gesuchten Schnittpunkten X und Y. Die Tangenten in X und Y sind XL und YL. Die Figur zeigt zugleich, *wie man von einem gegebenen Punkt L die Tangenten an die Parabel ziehen kann.*

Die Hyperbel.

141. *Eine Hyperbel kann immer so bestimmt werden, daß sie durch einen willkürlich gegebenen (eigentlichen) Punkt A geht und zwei gegebene (eigentliche) nicht parallele Linien a und b (von denen keine durch A geht) zu Asymptoten hat.* A, a und b müssen dabei natürlich in derselben Ebene, z. B. der Zeichenebene, liegen.

Beweis: Auf dem Rotationskegel, der durch a und b geht, und dessen Achse den Winkel (ab), der A enthält, halbiert, denkt man sich einen Punkt A_1 bestimmt, dessen senkrechte Projektion auf die Zeichenebene A ist. Eine Ebene durch A_1 parallel zur Zeichenebene schneidet nun den Kegel in einer Hyperbel, deren senkrechte Projektion auf die Zeichenebene die angegebenen Bedingungen erfüllt. Daß die Hyperbel eindeutig bestimmt ist, folgt aus dem Pascalschen Satz.

142. Für eine auf die angeführte Weise gegebene Hyperbel wollen wir auch den zweiten Schnittpunkt F mit einer gegebenen Linie 1, die durch A geht, suchen (Fig. 132). Wir wenden zu diesem Zwecke den Pascalschen Satz auf das Sechseck $ABCDEF$ an, in dem B und C beide in den unendlich fernen Punkt von a, D und E in den unendlich fernen Punkt von b fallen. Die Seiten seien 1, 2, 3, 4, 5 und 6, wobei 6 unbekannt ist. Die Pascalsche Linie ist in der Figur mit p bezeichnet.

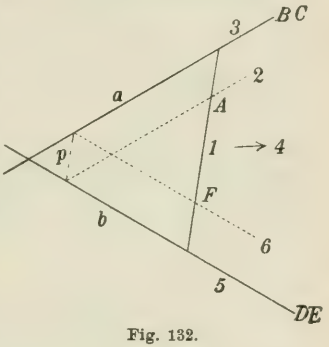


Fig. 132.

Aus der Figur sieht man, daß die auf der gegebenen Linie zwischen A und a und zwischen F und b abgeschnittenen Stücke gleich groß sind. Also: *Wenn eine gerade Linie eine Hyperbel in zwei Punkten schneidet, so ist der Abstand des einen Punktes vom Schnittpunkt der Linie mit der einen Asymptote gleich und entgegengesetzt gerichtet dem Abstand des anderen Punktes vom Schnittpunkt der Linie mit der anderen Asymptote.* Zugleich erkennt man: *Der Berührungspunkt einer Tangente liegt in der Mitte zwischen den Schnittpunkten der Tangente mit den Asymptoten.*

In Fig. 133, bei der die Hyperbel durch die Asymptoten a und b und den Punkt A bestimmt sein soll, ist auf der Linie AP ein neuer Punkt B der Hyperbel durch die Beziehung $BQ = PA$ bestimmt, und gleichzeitig die Tangente AA_2 in A durch die Beziehungen $AA_1 \parallel a$, $A_1A_2 = OA_1$. Aus der Konstruktion folgt, daß *die Parallelprojektion einer Hyperbel, wenn die Ebene*

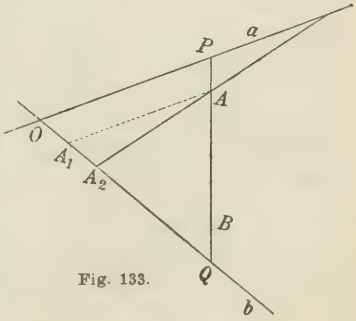


Fig. 133.

der Hyperbel nicht von Projektionsstrahlen erfüllt wird, eine neue Hyperbel ist. Projiziert man nämlich a, b und A in a', b' und A', so enthält die Hyperbel, deren Asymptoten a' und b' sind und die durch A' geht, die Projektion B' eines willkürlichen Punktes B der gegebenen Hyperbel. Auf ähnliche Weise erkennt man, daß das affin perspektive Bild einer Hyperbel wieder eine neue Hyperbel ist.

143. *Konstruktion der Scheitelpunkte einer Hyperbel, wenn die Asymptoten a und b und ein willkürlicher Punkt M der Hyperbel gegeben sind* (Fig. 134). Die Hauptachse der Hyperbel halbiert den Winkel (ab), der M enthält. Projiziert man M aus den unendlich fernen Punkten der Hyperbel auf die Achse, so erhält man zwei konjugierte Punkte P und P_1 (130,2), und da der Mittelpunkt O dem unendlich fernen Punkt der Achse konjugiert ist, so liefert die mittlere Proportionale von OP und OP_1 die Länge $OX = OY$ der reellen Halbachse; auf diese Weise findet man die Scheitelpunkte X und Y. Dasselbe Verfahren kann man auch anwenden, um die Schnittpunkte der Hyperbel mit einem beliebigen Durchmesser zu bestimmen.

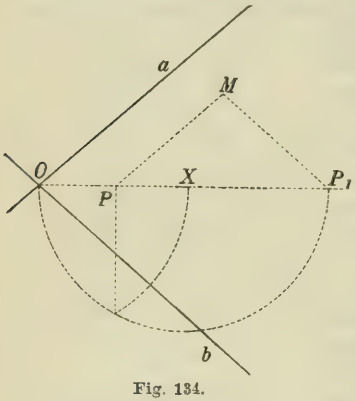


Fig. 134.

144. *Konstruktion der Schnittpunkte einer Hyperbel mit einer geraden Linie, die nicht durch den Mittelpunkt der Hyperbel geht.* Die Hyperbel sei gegeben durch die Asymptoten a und b und den Punkt M.

1. Ist die gegebene Linie l der einen Asymptote a parallel (Fig. 135), so schneide eine Linie durch M parallel zu a die Gerade b in M_1 und l schneide b in L. Trägt man dann auf b $LL_1 = OM_1$ ab, so schneidet ML_1 die Linie l in dem gesuchten Punkt N.

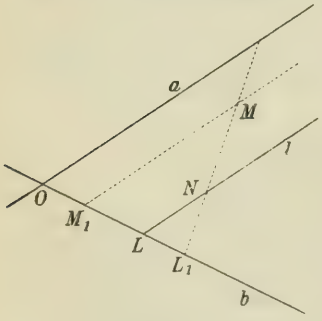


Fig. 135.

2. Hat die gegebene Linie l eine beliebige andere Richtung (Fig. 136), so konstruiere man die Tangente m in M. Eine Linie durch M

parallel zu b schneide l in X; man trage nun $MX_1 = XM$ auf der Verlängerung von XM ab, dann ist X_1 konjugiert zu X. Die Polare X_1X_2 des Punktes X geht durch X_1 und gleichzeitig durch den Schnittpunkt von m und b, denn dieser letzte Punkt ist der Pol von MX. X_1X_2 schneidet aber l in einem Punkte X_2, der zu X konjugiert ist. Da gleichzeitig der Mittelpunkt C des Stückes von l, das zwischen a und b liegt, auch der Mittelpunkt der auf l abgeschnittenen Sehne ist, muß C der Mittelpunkt der Involution, welche die konjugierten Punkte auf l bilden, sein, und die mittlere Proportionale von CX und CX_2 muß gleich dem Abstand des Punktes C von den gesuchten Schnittpunkten werden.[1])

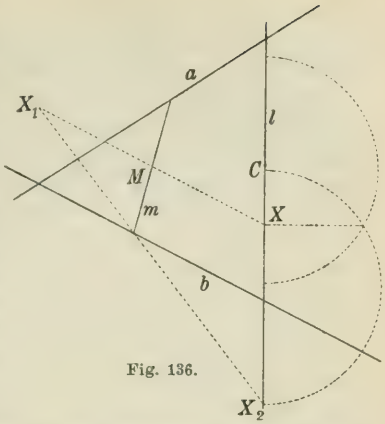


Fig. 136.

Perspektive Kegelschnitte.

145. Wir haben gesehen, daß die Parallelprojektion eines gegebenen Kegelschnittes ein neuer Kegelschnitt von der gleichen Art wie der gegebene wird (133, 139, 142). Nur kann in besonderen Fällen die Projektion auch eine gerade Linie oder ein Teil von einer solchen werden.

Insbesondere wird ein Kreis, dessen Ebene nicht von Projektionsstrahlen erfüllt wird, durch Parallelprojektion in eine Ellipse übergeführt. Gleichzeitig folgt unmittelbar aus der Definition der Kegelschnitte (116), daß ein Kreis durch Zentralprojektion aus einem Projektionszentrum, das auf der Achse des Kreises (d. h. dem Lot der Ebene des Kreises in dem Kreismittelpunkt) liegt, in einen Kegelschnitt projiziert wird.

Wir wollen nun beweisen, daß *durch Zentralprojektion eines Kreises, dessen Ebene nicht durch das Projektionszentrum hindurchgeht, immer ein Kegelschnitt entsteht.*

---

1) Was die Kegelschnitte betrifft, so kann zur Ergänzung der kurzen Darstellung, die hier allein möglich war, etwa benutzt werden: Steiner-Geiser, *Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung*, 3. Aufl. Leipzig 1887.

Der Kreis k in der Ebene Π werde aus S auf die Ebene Σ projiziert. Die Projektion des Kreises sei mit s bezeichnet (Fig. 137). Durch k legen wir einen Rotationskegel mit der Spitze S_1. In einer perspektivischen Affinität, die durch die Affinitätsebene Π und die homologen Punkte S und S_1 bestimmt wird, entspricht dem Kegel, der k aus S projiziert, der Kegel, der k aus S_1 projiziert. Der Ebene Σ entspricht eine Ebene Σ_1, die den Rotationskegel in einem Kegelschnitt s_1 schneidet, und dieser Kegelschnitt entspricht der Kurve s. Da die Verbindungslinien entsprechender Punkte auf s und s_1 parallel zu SS_1 sind, ist s eine Parallelprojektion von s_1, und da s_1 ein Kegelschnitt ist, muß s auch ein Kegelschnitt sein. Wir haben vorausgesetzt, daß die Ebenen Σ und Σ_1 verschieden sind. Aber wenn Σ und Σ_1 zusammenfallen, so werden s und s_1 einander in einer ebenen perspektivischen Affinität entsprechen, woraus man wieder sieht, daß s ein Kegelschnitt ist. Da man immer durch einen beliebigen Kegelschnitt einen Rotationskegel legen kann, kann man auf diese Weise auch nachweisen, daß *die Zentralprojektion eines Kegelschnittes wieder einen Kegelschnitt liefert.*

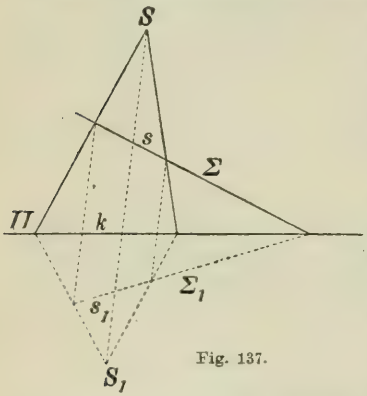


Fig. 137.

146. *In einer ebenen Perspektivität entspricht jedem Kegelschnitt k ein neuer Kegelschnitt k'.* Denn die beiden entsprechenden Kurven k und k' kann man als die Projektion von zwei perspektiven ebenen Kurven in verschiedenen Ebenen ansehen, von denen die eine ein Kegelschnitt ist und deshalb die andere auch ein Kegelschnitt sein muß. Pol und Polare bezüglich k entsprechen Pol und Polare bezüglich k'.

Man beweist leicht, daß *ein Kegelschnitt durch eine Raumperspektive wieder in einen Kegelschnitt übergeht.* Für den Fall, wo alle seine Punkte in unendlich ferne transformiert werden, verweisen wir auf 150.

147. *Durch fünf willkürlich gegebene Punkte A, B, C, D und E in der Ebene kann immer ein Kegelschnitt gelegt werden, wenn bloß nicht drei oder mehr der gegebenen Punkte in einer geraden Linie liegen.* Höchstens zwei der gegebenen Punkte können unendlich fern sein. Wenn der gesuchte Kegelschnitt existiert, kann

die Tangente a im Punkte A (der ein eigentlicher Punkt sein soll), nach der früher angegebenen Konstruktion gefunden werden. Führen wir diese Konstruktion aus, so gelangen wir zu einer bestimmten Linie a, und wir brauchen bloß zu zeigen, daß ein Kegelschnitt existiert, der A in a berührt und durch B, C und D geht, denn ein solcher Kegelschnitt wird zufolge des Pascalschen Satzes auch durch E gehen. Beschreiben wir nun einen Kreis k_1, der a in A berührt, und schneiden die Verbindungslinien AB, AC und AD diesen Kreis zum zweitenmal in B_1, C_1 und D_1, so kann man eine Perspektivität bestimmen, deren Zentrum A ist und in welcher B, C und D der Reihe nach B_1, C_1 und D_1 entsprechen. In dieser Perspektivität entspricht k_1 einem Kegelschnitt, der a in A berührt und durch B, C und D geht. Damit ist bewiesen, daß der gesuchte Kegelschnitt existiert. Daß man durch fünf gegebene Punkte nur einen Kegelschnitt legen kann, folgt sofort aus dem Pascalschen Satz.

148. *Man kann immer einen Kegelschnitt bestimmen derart, daß er fünf willkürlich gegebene Linien a, b, c, d und e der Ebene berührt, wenn bloß nicht drei oder mehr der gegebenen Linien durch denselben Punkt gehen.* Wenn der gesuchte Kegelschnitt existiert, so wird der Berührungspunkt A von a ein bestimmter Punkt, der durch die früher angegebene Konstruktion gefunden werden kann. Es genügt also zu zeigen, daß ein Kegelschnitt existiert, der a in A und gleichzeitig b, c und d berührt. Dies tun wir auf folgende Weise: Wir nehmen einen Kegelschnitt (oder insbesondere einen Kreis) k_1 an, der a in A berührt. In einer Perspektivität, deren Kollineationsachse a ist und in welcher b, c und d Tangenten von k_1 entsprechen, entspricht k_1 einem Kegelschnitt, der a, b, c und d, und zwar a im Punkte A, berührt. Daß es nur einen Kegelschnitt gibt, der die gegebenen Bedingungen erfüllt, folgt aus dem Brianchonschen Satz.

149. Aus bekannten Sätzen für den Kreis (vgl. 94, 113) leiten wir durch Zentralprojektion folgende Sätze für einen beliebigen Kegelschnitt ab.

Aus zwei festen Punkten auf einem Kegelschnitt werden die Punkte des Kegelschnittes durch projektive Strahlenbüschel projiziert.

Zwei feste Tangenten eines Kegelschnittes werden von den übrigen Tangenten in projektiven Punktreihen geschnitten.

Wir wollen nun beweisen:

Von zwei projektiven, nicht kollokalen und nicht perspektiven

Von zwei projektiven, nicht kollokalen und nicht perspektiven

Strahlenbüscheln derselben Ebene liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einem Kegelschnitt. Legt man nämlich einen Kegelschnitt durch die Mittelpunkte A und B und irgend drei andere Schnittpunkte entsprechender Strahlen, so wird dieser Kegelschnitt aus A und B durch projektive Strahlenbüschel projiziert, die mit den gegebenen Büscheln zusammenfallen.

Punktreihen derselben Ebene berühren die Verbindungslinien entsprechender Punkte einen Kegelschnitt. Zeichnet man nämlich einen Kegelschnitt, der die Träger der Punktreihen a und b und irgend drei andere Verbindungslinien entsprechender Punkte berührt, so schneiden die Tangenten dieses Kegelschnittes auf a und b projektive Punktreihen aus, die mit den gegebenen Punktreihen zusammenfallen.

Diese Sätze zeigen u. a., daß *die einem Kegelschnitt dualistisch entsprechende Figur ein neuer Kegelschnitt ist, derart, daß den Punkten und Tangenten des ersten Kegelschnittes die Tangenten und Punkte des zweiten Kegelschnittes entsprechen.*

150. Ein *unendlich ferner Kegelschnitt* ist definiert als die Gesamtheit der unendlich fernen Punkte, deren Zentralprojektion auf eine beliebige Ebene ein Kegelschnitt ist. Die im Vorstehenden entwickelten projektiven Sätze gelten dann auch von unendlich fernen Kegelschnitten. Im folgenden wollen wir aber, wenn das Gegenteil nicht ausdrücklich betont wird, unendlich ferne Kegelschnitte außer Betracht lassen.

151. Eine allgemeine Methode zur Lösung von Aufgaben über einen vorgelegten Kegelschnitt besteht darin, daß man eine Perspektivität bestimmt, in welcher der Kegelschnitt einem Kreis entspricht. Dadurch kann man die Aufgabe auf eine analoge Aufgabe für den Kreis zurückführen.

Hat man zur Bestimmung des Kegelschnittes k unter anderem eine Tangente a mit ihrem Berührungspunkt A (der nicht unendlich fern sei) gegeben, so kann man, wie früher gezeigt, eine Perspektivität mit dem Zentrum A (vgl. 147) oder der Achse a (vgl. 148) bestimmen, so daß k in dieser Perspektivität einem Kreis k_1 entspricht, der a in A berührt.

Hat man zur Bestimmung des Kegelschnittes k unter anderem zwei durch den eigentlichen Punkt S gehende Tangenten a und b (Fig. 138), so kann man einen Kreis k_1, der a und b berührt, derart beschreiben, daß eine Linie, die durch den Schnittpunkt S von a und b geht und den Kegelschnitt schneidet, immer auch den Kreis schneidet, k und k_1 entsprechen einander dann in einer

Perspektivität, deren Zentrum S ist. Denn berühren a und b den Kegelschnitt k in A und B, den Kreis k_1 in A_1 und B_1, und schneidet eine Linie durch S und einen Punkt C des Kegelschnittes den Kreis in zwei Punkten, von denen der eine C_1 ist, so bestimme man eine Perspektivität derart, daß A_1, B_1 und C_1 der Reihe nach A, B und C entsprechen, dann entsprechen auch k_1 und k einander. Da nämlich k_1 die Linien a und b in A_1 und B_1 berührt und zugleich durch C_1 geht, wird die entsprechende Kurve ein Kegelschnitt, der a und b in A und B berührt und durch C geht, der also mit k zusammenfällt. Wir müssen beachten, daß die Perspektivität auf zwei Arten bestimmt werden kann, indem wir an Stelle von C_1 auch den anderen Schnittpunkt von SC mit dem Kreis wählen können.

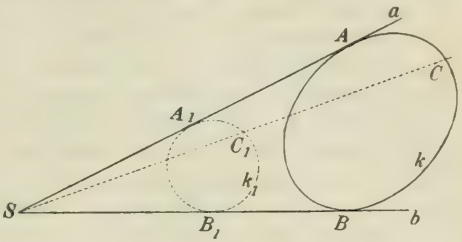


Fig. 138.

152. Hat man eine Perspektivität bestimmt, in welcher der Kegelschnitt k einem Kreis k_1 entspricht, so kann man unmittelbar die Aufgabe lösen, die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit einer gegebenen Geraden zu bestimmen oder aus einem gegebenen Punkt an k die Tangente zu ziehen. Wir wollen noch zeigen, wie man die Perspektivität zu einer näheren Untersuchung des Kegelschnittes benutzen kann.

Wenn die zu k_1 gehörende Fluchtlinie u_1 keinen Punkt mit k_1 gemein hat, so enthält der Kegelschnitt keinen unendlich fernen Punkt und ist deshalb eine Ellipse.

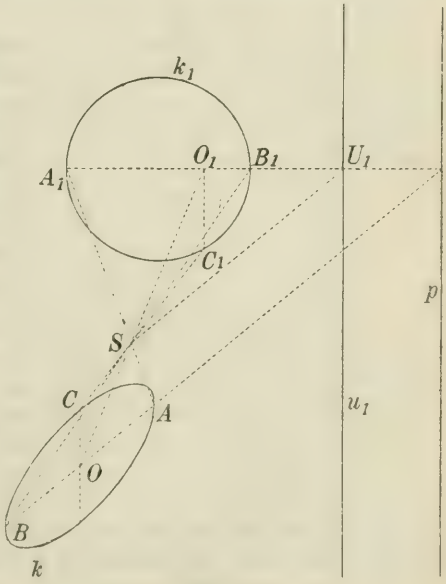


Fig. 139.

Wenn u_1 den Kreis in zwei Punkten schneidet, so entsprechen diese zwei unendlich fernen Punkten des Kegelschnittes, der also in diesem Falle eine Hyperbel wird. Berührt endlich u_1 den Kreis k_1, so wird k eine Parabel. Wir untersuchen jeden dieser drei Fälle näher, indem wir uns die Perspektivität durch das Zentrum S, die Kollineationsachse p und die Fluchtlinie u_1 bestimmt denken.

1. In Fig. 139 ist k eine Ellipse. Man findet ihre Scheitel folgendermaßen: Der Kreisdurchmesser $A_1B_1 \perp p$ entspricht einem Durchmesser AB der Ellipse. Denn der Pol von A_1B_1 bezüglich k_1 liegt unendlich fern in der Richtung p; der Pol von AB bezüglich k fällt in denselben unendlich fernen Punkt. Der Mittelpunkt O von AB ist der Mittelpunkt der Ellipse. Der entsprechende Punkt sei O_1. Man zieht nun $O_1C_1 \parallel p$ bis zum Schnitt mit dem Kreis in C_1. $OC \parallel p$ entspricht O_1C_1, und es werden OC und OA ein Paar konjugierte Halbmesser der Ellipse. Die Scheitel können daraus nach der früher erörterten Methode gefunden werden (131).

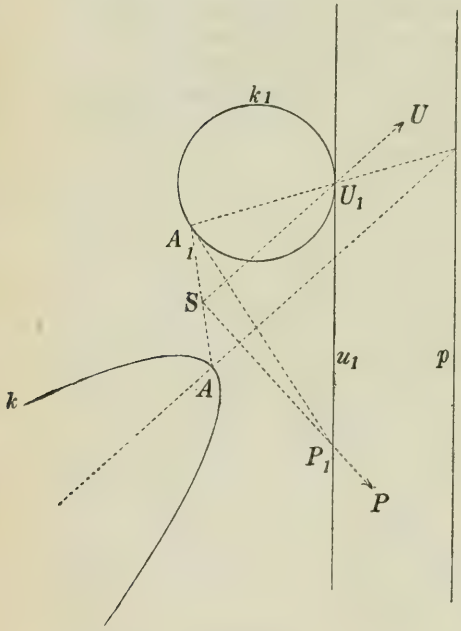


Fig. 140.

2. Wenn U_1 den Kreis k_1 schneidet, so entsprechen die Tangenten des Kreises in den Schnittpunkten den Asymptoten von k. Man kann so diese zunächst bestimmen und damit die Hauptachse der Hyperbel finden. Mit Hilfe der Perspektivität findet man dann die Scheitel als die Schnittpunkte der gefundenen Hauptachse mit der Hyperbel.

3. Berührt u_1 den Kreis k_1 in U_1 (Fig. 140), ist also der Kegelschnitt eine Parabel, deren Achse die Richtung SU_1 hat, so liegt der Pol P der Achse unendlich fern in der Richtung $SP \perp SU_1$. Der P entsprechende Punkt P_1 kann dann sofort bestimmt werden. Die Polare von P_1 bezüglich k_1 ist U_1A_1 (senkrecht auf dem durch P_1 gehenden Durchmesser des Kreises), und diese Linie entspricht der Achse

der Parabel, die also durch Q geht und zu SU_1 parallel ist. Die Achse der Parabel schneidet SA_1 in dem Scheitel A der Parabel.

. **153.** *In dem besonderen Fall, wo S auf k_1 liegt* (Fig. 141) *und deshalb k und k_1 einander in S berühren, bilden die Perspektivitätsachse p und die gemeinsame Tangente t in S gleich große Winkel (nach entgegengesetzten Seiten) mit jeder Achse des Kegelschnittes.*

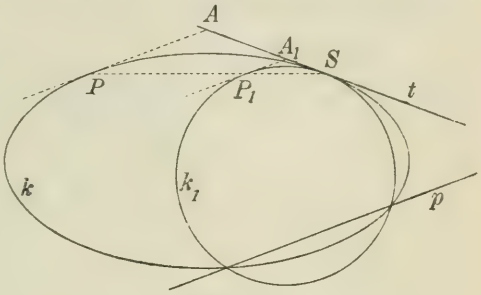


Fig. 141.

Dies kann man folgendermaßen beweisen: Eine Linie durch S parallel zu einer Achse des Kegelschnittes schneidet k und k_1 in entsprechenden Punkten P und P_1. Die Tangenten PA und P_1A_1 entsprechen einander, und da sie gleich große Winkel nach derselben Seite hin mit der Linie PP_1 bilden ($\sphericalangle APS = \sphericalangle ASP = \sphericalangle A_1P_1S$), sind sie zueinander und zu der Perspektivitätsachse parallel. p und t bilden also gleich große Winkel mit SP, also auch mit jeder der Achsen des Kegelschnittes.

Der Durchmesser des Kreises durch P_1 ist senkrecht zu p. Die Strahlen aus S nach den Endpunkten dieses Durchmessers geben die Richtungen der Achsen des Kegelschnittes an. Dies kann man zur Bestimmung der Achsen benutzen, wenn der Mittelpunkt gefunden ist.

Schmiegungskreise.

154. Ein veränderlicher Kreis, der einen Kegelschnitt k in einem festen Punkt A berührt und durch einen beweglichen Punkt B von k geht, konvergiert, wenn B sich A nähert, nach einer bestimmten Grenzlage, dem *Schmiegungskreis* des Kegelschnittes in A. Der veränderliche Kreis entspricht nämlich in jedem Augenblick dem Kegelschnitt k in einer Perspektivität, deren Zentrum A ist, und deren Achse durch B geht und (nach 153) eine konstante Richtung hat. Nähert sich B dem Punkte A, so nähert sich auch die Perspektivitätsachse einer bestimmten Linie p, die durch A geht und zur Tangente in A bezüglich einer Parallelen zu einer Achse des Kegelschnittes symmetrisch ist.

Ist A kein Scheitel von k, so schneidet p den Kegelschnitt k in einem neuen Punkt M, und der Schmiegungskreis ist dadurch bestimmt, daß er durch M geht und k in A berührt.

Ist A ein Scheitel von k, so fällt p mit der Scheiteltangente zusammen. Von einer Sehne AB des Kegelschnittes liegt der Pol P im Schnittpunkt von p mit der Tangente in B (Fig. 142).

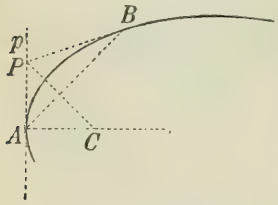


Fig. 142.

P ist dann auch der Pol von AB bezüglich des Schmiegungskreises, und dessen Mittelpunkt C liegt auf der Linie $PC \perp AB$. Ist der Kegelschnitt eine Ellipse mit den Achsen AA_1 und BB_1, so findet man gleichzeitig die Mittelpunkte C und C_1 der Schmiegungskreise für A und B, indem man aus dem Pol P von AB das Lot auf AB fällt. P ist dabei die vierte Ecke des durch A, O, B bestimmten Rechteckes (Fig. 143). Soll man den Mittelpunkt C des Schmiegungskreises für den Scheitel A einer Hyperbel finden (Fig. 144), so kann man B un-

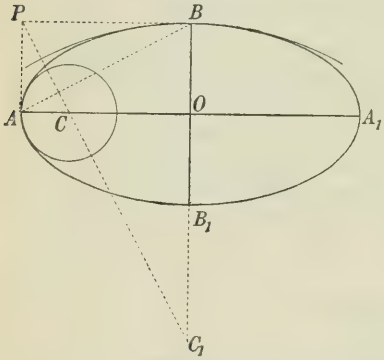


Fig. 143.

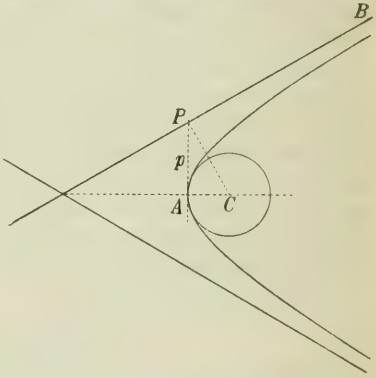


Fig. 144.

endlich fern annehmen. Der Pol P von AB wird dann der Schnittpunkt der Hyperbel mit der Scheiteltangente. Die Senkrechte aus P auf AB ist senkrecht zu einer Asymptote und schneidet die Achse der Hyperbel in C.

155. Die Betrachtung der angegebenen Perspektivität zeigt, daß der Schmiegungskreis in einem Punkt A eines Kegelschnittes k, wenn man annimmt, daß A kein Scheitelpunkt ist, k im Punkt A durchsetzt, d. h. wenn ein Punkt den Schmiegungskreis durchläuft, so tritt er beim Passieren von A von der einen Seite des Kegel-

schnittes auf die andere über. Weiter erkennt man, daß ein Kreis, der k in einem Punkte A berührt und gleichzeitig durchsetzt, der Schmiegungskreis in A sein muß.

Wenn A ein Scheitelpunkt des Kegelschnittes ist, so liegt der Schmiegungskreis entweder ganz innerhalb oder ganz außerhalb des Kegelschnittes.

156. Eine sehr einfache Bestimmung des Schmiegungskreises für einen beliebigen Punkt einer Ellipse oder einer Hyperbel kann man mit Hilfe des folgenden Satzes finden *(Steinerscher Satz): Wenn ein eigentlicher Punkt P eine gerade Linie a durchläuft, die nicht ein Durchmesser des Kegelschnittes ist, so geht das aus P auf die Polare p dieses Punktes gefällte Lot entweder durch einen bestimmten Punkt oder berührt eine bestimmte Parabel* (Fig. 145).

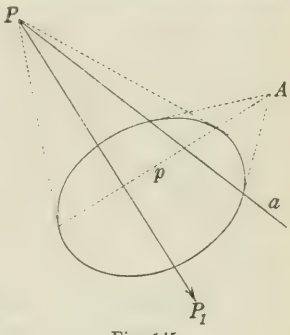


Fig. 145.

Beweis: p beschreibt einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt im Pol A von a liegt. Dieser Strahlenbüschel ist gleichzeitig projektiv zu der von P beschriebenen Punktreihe und zu einer von dem unendlich fernen Punkte P_1 in der Richtung $\perp p$ beschriebenen Punktreihe. Die von P und P_1 durchlaufenen Punktreihen sind also projektiv, und die Linie PP_1 geht entweder (wenn die Reihen perspektiv sind) durch einen Punkt oder berührt (wenn die Reihen nicht perspektiv sind) einen Kegelschnitt, der a und die unendlich ferne Linie zu Tangenten hat, der also eine Parabel ist.

Wenn a zu einer der Achsen des gegebenen Kegelschnittes senkrecht ist, so geht die Linie PP_1 durch einen festen Punkt auf dieser Achse. Ist hingegen a zu keiner der Achsen des Kegelschnittes senkrecht, so berühren die Linien PP_1 eine Parabel. Die Achsen des Kegelschnittes und das aus A auf a gefällte Lot sind nämlich besondere Lagen von PP_1, und diese drei Linien können nicht durch denselben Punkt gehen.

157. Wir nehmen nun an, daß die Linie a den gegebenen Kegelschnitt in A und B schneidet (Fig. 146), indem wir voraussetzen, daß A kein Scheitelpunkt des Kegelschnittes ist. a schneide die Achsen x und y des Kegelschnittes in X und Y, und M sei der Mittelpunkt von AB. Die aus A, M, X und Y auf die Polaren dieser Punkte gefällten Lote sind der Reihe nach n (die

Normale in A), m (die Mittelsenkrechte von AB, weil die Polare von $M \parallel AB$), x und y. Bezeichnet man die unendlich ferne Linie mit u, so müssen also die sechs Linien n, m, a, u, x und y nach dem Steinerschen Satz die Seiten eines einer bestimmten Parabel umschriebenen Sechseckes sein. Die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken dieses Sechseckes müssen demnach nach dem Brianchonschen Satz durch denselben Punkt gehen. Läßt man nun A fest, während B sich A nähert, so bleibt n fest, m nähert sich n, a nähert sich der Tangente t in A, und die drei Seiten u, x und y erfahren keine Veränderung. Die Ecken des Sechseckes erreichen dann folgende Grenzlagen (Fig. 147): Der Schnittpunkt 1 von n und m wird der Mittelpunkt des Schmiegungskreises für A, der Schnittpunkt 2 von m und a wird A, der Schnittpunkt 3 von a und u wird der unendlich ferne Punkt von t, die Ecke 4 ist der unendlich ferne Punkt von x, x und y schneiden sich in 5, y und n in 6. Die Punkte 2, 3, 4, 5 und 6 sind bekannt, während 1 unbekannt ist. Aber da die Linien 14, 25 und 36 durch denselben Punkt R gehen müssen, erhalten wir für den Mittelpunkt 1 des Schmiegungskreises folgende Konstruktion: *In dem Schnittpunkt 6 der Normalen n in A mit der einen Achse y errichten wir ein Lot auf n und schneiden es mit dem Durchmesser durch A im Punkte R. Die Parallele durch R zu der anderen Achse x schneidet dann die Normale n in dem gesuchten Punkt.*

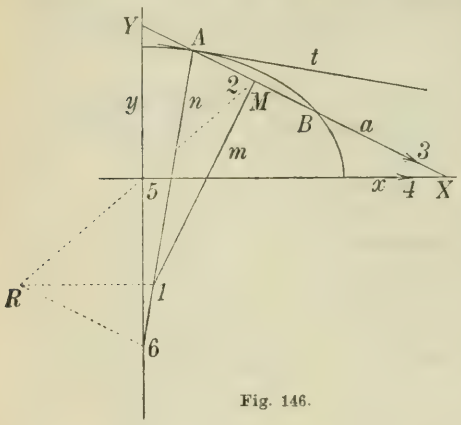


Fig. 146.

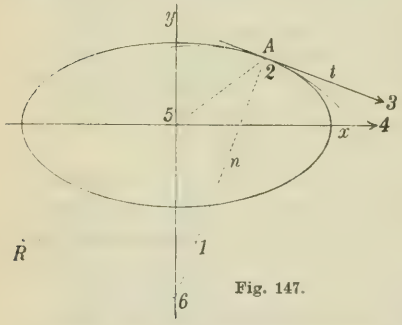


Fig. 147.

158. Bei der vorstehenden Betrachtung kann man die Linie m ersetzen durch die Normale n_1 in B, da n, n_1, a, u, x und y auch

ein einem Kegelschnitt umschriebenes Sechseck bilden. Nähert sich B dem A, so nähert sich n_1 dem n, und die Grenzlage für den Schnittpunkt von n_1 und n wird derselbe Punkt 1, den wir früher gefunden haben. Also: *Der Mittelpunkt des Schmiegungskreises für A ist die Grenzlage des Schnittpunktes der Normalen in A und der Normalen in dem Punkte B, der sich A nähert.*

159. Unser Beweis für den Steinerschen Satz gilt auch in dem Falle, wo der gegebene Kegelschnitt eine Parabel ist. Aber die Anwendung des Satzes auf die Konstruktion des Schmiegungskreises wird in diesem Falle etwas anders, da k nur eine Achse x besitzt. Da das aus einem eigentlichen Punkte von a auf die Polare dieses Punktes gefällte Lot nie zu x senkrecht sein kann, wird die Achse der Steinerschen Parabel senkrecht zu x. Indem wir die früheren Bezeichnungen wieder anwenden, berühren also n, m, a und x eine Parabel, deren Achsenrichtung senkrecht zu x ist (Fig. 148). In dem Brianchonschen Sechseck, dessen Seiten m, n, x, a, u und t sind, werden die Grenzlagen für die Ecken (Fig. 149): der gesuchte Mittelpunkt 1 des Schmiegungskreises, der Schnittpunkt 2 von n und x, 3 unendlich fern auf x, 4 unendlich fern in der Richtung senkrecht zu x, 5 unendlich fern auf t, 6 im Punkte A. Die Konstruktion verläuft dann so: in 2 wird ein Lot auf n errichtet, in dessen Schnittpunkt R mit dem Durchmesser durch A ein Lot auf x und dieses bis zum Schnitt mit n im gesuchten Punkte 1 verlängert.

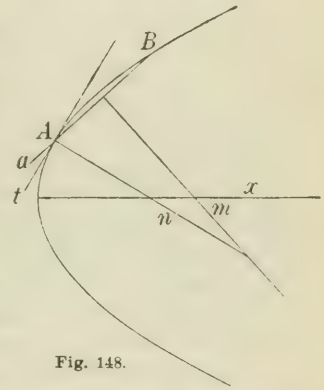


Fig. 148.

Errichtet man in dem Schnittpunkt T von t mit x ein Lot auf x bis zum Schnittpunkt N mit n, so sieht man aus der Figur, daß der Radius des Schmiegungskreises $A1 = N2$ wird. Auf diese Weise erhält man noch eine neue Konstruktion. Man beweist genau auf dieselbe Weise wie vorhin, daß der Mittelpunkt des Schmiegungskreises die Grenzlage für den Schnittpunkt der Normalen in A und der Normalen in dem Punkt B, der sich A nähert ist.

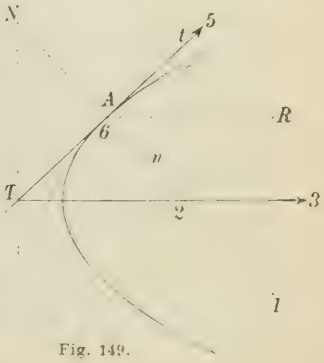


Fig. 149.

160. Ist A ein Scheitelpunkt des Kegelschnittes k (Fig. 150), so schneidet die Mittelsenkrechte m von AB die Achse x in einem Punkte C, der nach dem Steinerschen Satz auf jeder Linie liegt, die man durch einen Punkt der Linie p (die durch $M \perp x$ zu ziehen ist) senkrecht zur Polare dieses Punktes zieht. Ebenso wird die Normale n_1 in B die Achse x in einem Punkt C_1 schneiden, der auf jeder Linie liegt, die man durch einen Punkt der Linie q (die durch $B \perp x$ gezogen wird) senkrecht zu der Polare dieses Punktes ziehen kann. Läßt man B sich A nähern, so nähern sich p und q beide der Scheiteltangente in A. C und C_1 nähern sich also derselben Grenzlage im Mittelpunkt des Schmiegungskreises für A. Wir haben damit in allen Fällen bewiesen, daß *der Mittelpunkt des Schmiegungskreises für einen beliebigen Punkt A eines Kegelschnittes die Grenzlage für den Schnittpunkt der Normalen in A und der Normalen in dem sich A nähernden Punkt B ist.*

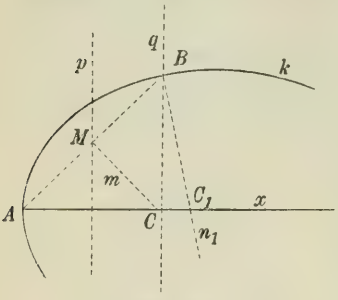


Fig. 150.

Aus diesem Satze folgt sofort, daß der Radius des Schmiegungskreises in dem Scheitel einer Parabel gleich der konstanten Subnormalen, also gleich dem Parameter wird.

Siebentes Kapitel.

Ebene Kurven.

Einfache Bögen.

161. Wenn ein Punkt sich in der Ebene kontinuierlich aus einer Lage in eine andere bewegt, so daß er jede Zwischenlage nur einmal passiert, so beschreibt er einen *Bogen* oder eine *Kurve* (die *Bahn* des beweglichen Punktes). Derselbe Bogen kann auch so beschrieben werden, daß der Punkt die gleichen Lagen in der umgekehrten Reihenfolge durchläuft. Jedem Bogen entsprechen dergestalt zwei verschiedene *Umlaufssinne*. Jeder Punkt M des Bogens, der von seinen Endpunkten A und B verschieden ist, teilt den Bogen in zwei Bögen, MA und MB. Wir nehmen an, daß der Bogen MA in M eine bestimmte *Halbtangente* m_1 besitzt, die als eindeutig bestimmte Grenzlage aus einem von M ausgehenden Halbstrahl[1]) entsteht, wenn dieser einen zweiten, beweglichen Punkt M_1 des Bogens MA enthält und M_1 sich M unbegrenzt nähert. Ebenso setzen wir voraus, daß der Bogen MB auch eine bestimmte Halbtangente m_2 in M besitzt, ferner daß die so festgelegten beiden Halbtangenten entgegengesetzt gerichtet sind, so daß sie sich zu einer geraden Linie, der *Tangente* in M, ergänzen (vgl. Fig. 151).

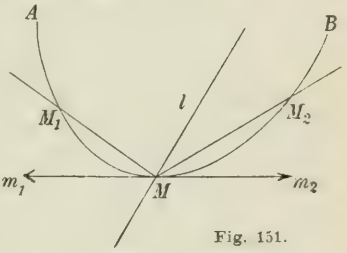


Fig. 151.

Es sei l eine beliebige gerade Linie durch M, die von der Tangente verschieden ist. Wenn der Punkt M_1 sich nach M hin bewegt, liegt der Halbstrahl MM_1 zuletzt auf derselben Seite von

---

1) Die sämtlichen auf einer und derselben Seite von M gelegenen Punkte einer Geraden, die durch M geht, bilden einen von M ausgehenden *Halbstrahl*. Eine Gerade wird durch jeden ihrer Punkte in zwei Halbstrahlen zerlegt.

l wie die Halbtangente m_1, der Bogen MM_1 selbst liegt also zuletzt auch auf dieser Seite von l. Ebenso erkennt man, daß, wenn der Punkt M_2 des Bogens MB sich auf M zu bewegt, der Bogen MM_2 zuletzt auf derselben Seite von l wie m_2 liegt. Man sagt deshalb, daß l die Umgebung von M in zwei verschiedene Teile zerlegt, einen auf jeder Seite von l. Hieraus folgt aber, daß der Bogen AB wenigstens einen Punkt P enthalten muß, dessen Tangente zu der Sehne AB parallel ist. Sucht man nämlich (Fig. 152) auf dem Bogen AB einen Punkt P, dessen Abstand h von der Linie AB so groß wie möglich ist, so muß die gerade Linie, die durch P parallel zu der Sehne AB gezogen wird, die Tangente in P sein, denn sonst müßten nach den soeben angestellten Überlegungen Punkte des Bogens auf beiden Seiten von p liegen, so daß der Abstand h nicht der größte sein könnte.

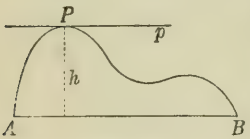


Fig. 152.

Auch in den Endpunkten A und B wollen wir die Existenz bestimmter Halbtangenten voraussetzen; in jedem von diesen Punkten finden wir nach unserer Definition nur eine Halbtangente, die mit ihrer Verlängerung zusammen die Tangente in diesem Punkte bildet. Bisweilen betrachten wir indessen auch diese Verlängerung als eine (uneigentliche) Halbtangente des Bogens.

Wenn ein Punkt M den Bogen AB von A nach B hin durchläuft, so kann man für jede Lage von M von einer bestimmten zu diesem Umlauf gehörenden Halbtangente sprechen; darunter wollen wir die bei diesem Umlauf nach vorwärts gerichtete Halbtangente verstehen, d. h. die Halbtangente des Bogens MB, solange M von B verschieden ist, und die uneigentliche Halbtangente, wenn M mit B zusammenfällt.

162. Wir wollen nun den Bogen AB von solcher Beschaffenheit voraussetzen, daß die vorwärtslaufende Halbtangente, die zu einem bestimmten Umlauf gehört, *kontinuierlich* und *monoton* variiert, d. h. wenn M den Bogen von A bis B durchläuft, soll die vorwärtslaufende Halbtangente ihre Richtung so stetig ändern, daß diese sich beständig nach derselben Seite dreht (wir schließen solche Bögen aus, die geradlinige Bestandteile enthalten). Ziehen wir von einem festen Punkt O aus einen Halbstrahl m in derselben Richtung wie die genannte Halbtangente in M, so soll dieser Halbstrahl sich kontinuierlich und beständig nach derselben Seite bewegen, so daß er jede seiner Lagen nur einmal passiert. Wir wollen zugleich annehmen, daß der von m beschriebene Winkel kleiner als 180^0 sei.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, nennen wir den Bogen AB einen *einfachen Bogen*. Ein einfacher Bogen kann sonach nicht mehr als eine Tangente besitzen, die einer gegebenen Linie parallel ist. Wir schließen hieraus sofort:

1. *Die Tangente in einem Punkt M des Bogens hat mit dem Bogen keinen anderen Punkt gemein als den Berührungspunkt.* Hätte sie nämlich noch einen anderen Punkt M_1 mit dem Bogen gemein, so müßte auf dem Bogen MM_1 ein Punkt existieren, dessen Tangente der Linie MM_1, also der gegebenen Tangente parallel ist (nämlich der Punkt größten Abstandes von MM_1).

2. *Eine gerade Linie hat höchstens zwei Punkte mit dem Bogen gemein.* Wenn nämlich drei aufeinanderfolgende Punkte M, P, Q des Bogens auf einer geraden Linie lägen, so müßten die Bögen MP und PQ Punkte enthalten, deren Tangenten beide der geraden Linie parallel wären.

3. *Nimmt man zwei Punkte M und N auf dem Bogen an, so schneiden die Halbtangenten des Bogens MN in diesen Punkten einander in einem Punkte T derart, daß das Dreieck MNT den Bogen MN umschließt.* Der Beweis wird folgendermaßen geführt (Fig. 153): Der Bogen MN hat keinen anderen Punkt mit der Tangente m in M gemein als den Berührungspunkt M, der Bogen muß also ganz auf der einen Seite der Tangente m liegen. Die durch N gezogene Parallele l zu m hat mit dem Bogen nur denPunkt N gemein, denn sonst müßte eine weitere zu m parallele Tangente existieren. Der Bogen liegt also auch ganz auf der einen Seite von l. Er liegt weiter aber auch auf einer bestimmten Seite der Linie MN. Hieraus folgt, daß er in dem Flächenstück liegt, das von der Strecke MN, der Halbtangente m_1 des Bogens in M und dem damit gleichgerichteten Halbstrahl l_1 der Linie l begrenzt wird. Die Halbtangente n_1 in N muß deshalb in dem konvexen Winkel zwischen den Halbstrahlen l_1 und NM liegen, sie muß also m_1 in einem Punkte T schneiden, und da der Bogen auf einer bestimmten Seite von jeder der drei Linien MN, MT und NT liegen muß, nämlich auf der Seite, die jedesmal durch den dritten Punkt angegeben wird, ist der Bogen in dem Dreieck MNT eingeschlossen.

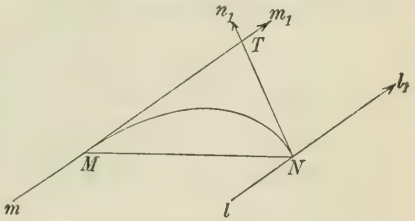


Fig. 153.

Aus diesem Satz folgt nun weiter:

Jeder Punkt P des Bogens hat eine Tangente, welche die Strecken MT und NT schneidet.

Durch einen beliebigen Punkt der Ebene kann man höchstens zwei Tangenten an den Bogen legen.

Jeder Punkt M des einfachen Bogens ist die eindeutig bestimmte Grenzlage des Schnittpunktes der Tangente in M mit der Tangente in einem beweglichen Punkt N, der sich M unbegrenzt nähert, oder des Schnittpunktes der Tangenten in zwei verschiedenen beweglichen Punkten, die sich beide M nähern.

Die Tangente ist die eindeutig bestimmte Grenzlage der Verbindungslinie zweier verschiedener Punkte N und P, die auf dem Bogen nach M konvergieren; auf dem Bogen NP findet sich nämlich beständig ein Punkt, dessen Tangente der Linie NP parallel ist, und da diese Tangente nach der Tangente in M konvergiert, tut es auch die Linie NP.

163. Wir werden es im allgemeinen nur mit solchen Kurven zu tun haben, die man sich aus einfachen Bögen zusammengesetzt denken kann (*einfachen Kurven*). Durch Zusammensetzung zweier einfacher Bögen können aber in der Umgebung eines Punktes vier wesentlich verschiedene Formen von Kurven entstehen:

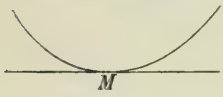


Fig. 154.

1. Die Halbtangenten sind entgegengesetzt gerichtet; die Umgebung von M ist ein einfacher Bogen. Der Punkt heißt dann ein *Konvexpunkt* (Fig. 154).

2. Die Halbtangenten sind entgegengesetzt gerichtet; die Kurve wird in der Umgebung von M in zwei verschiedene Bögen geteilt, einen auf jeder Seite der Tangente. Der Punkt heißt dann ein *Wendepunkt*, die Tangente eine *Wendetangente* (Fig. 155).

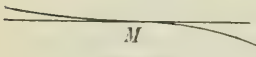


Fig. 155.

3. Die Halbtangenten in M fallen zusammen; die Kurve besteht in der Umgebung des Punktes M aus zwei Bögen, die von M ausgehen und auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen. Der Punkt heißt dann eine *Spitze erster Art* (Fig. 156).

4. Die Halbtangenten fallen zusammen; die Kurve liegt in der Umgebung von M auf der einen Seite der Tangente. Der Punkt heißt dann eine *Spitze zweiter Art* (Fig. 157).

Fig. 156.

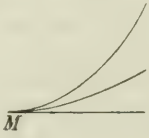


Fig. 157.

Ferner kann bei der Zusammensetzung von einfachen Bögen auch ein Knick entstehen, indem die Halbtangenten in dem betrachteten Punkte nicht in dieselbe gerade Linie fallen, oder ein Doppelpunkt, nämlich ein Schnittpunkt zweier verschiedener einfacher Bögen, die beide zu der betrachteten Kurve gehören. Indessen läßt sich die Untersuchung der Kurve immer auf die Untersuchung der einfachen Bögen zurückführen, aus denen sie besteht.

164. Ein einfacher Bogen AB hat eine bestimmte Länge, die man definieren kann als die kleinstmögliche Länge, die größer ist als der Umfang jedes dem Bogen einbeschriebenen konvexen Linienzuges (den Beweis für die Existenz der Bogenlänge übergehen wir). Die Bogenlänge ist der gemeinsame Grenzwert für einen dem Bogen einbeschriebenen konvexen Linienzug und einen ihm umschriebenen konvexen Linienzug, die beide dieselben Endpunkte haben wie der Bogen und sich so verändern, daß die Längen der einzelnen Stücke nach 0 konvergieren.

Das Verhältnis der Bogenlänge zur Sehne AB konvergiert gegen die Einheit, wenn die Endpunkte A und B sich derselben Grenzlage nähern.

Die Bogenlänge kann in einzelnen Fällen durch eine genaue Konstruktion mit Hilfe von Zirkel und Lineal gefunden werden. In der Praxis kann man den Bogen durch eine einbeschriebene gebrochene Linie mit genügend kleinen Seiten ersetzen.[1])

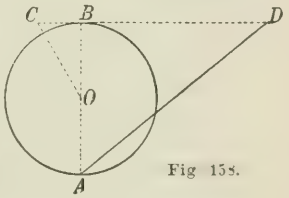


Fig 158.

Zur Rektifikation eines Halbkreises benutzt man folgende Näherungskonstruktion (Fig. 158): AB sei ein willkürlicher Durchmesser eines Kreises, O dessen Mittelpunkt. Auf der Tangente in B wird der Punkt C so bestimmt, daß $\sphericalangle BOC = 30^0$ wird. Darauf wird $CD = 3 \times$ Radius abgetragen. AD gibt dann, wie eine leichte Rechnung zeigt, mit hinreichender Genauigkeit die Länge des Halbkreises an.

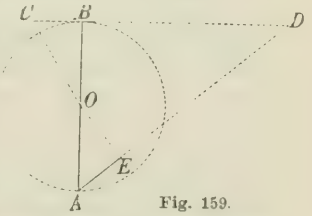


Fig. 159.

In Fig. 159 ist gezeigt, wie man umgekehrt den Radius eines Kreises finden kann, dessen Umfang die gegebene Länge p hat. Man zeichnet einen Kreis mit dem Durchmesser $\frac{p}{2}$ und bestimmt in

1) Näheres über graphische Rektifikationen bei Chr. Wiener, *Lehrbuch der darstell. Geom. I*, Leipzig 1884, S. 184—190.

der soeben angegebenen Weise dessen halben Umfang AD. OE sei senkrecht auf AD. Dann ist AE der Radius des gesuchten Kreises. Denn es wird

$$\frac{AE}{AO} = \frac{AB}{AD}, \text{ woraus } AE = \frac{p}{2\pi}.$$

Praktisch wird es sich empfehlen, ein für alle mal einen Winkel herzustellen, dessen Sinus $= \frac{2}{\pi}$ ist. In der Figur ist $\sphericalangle ADC$ ein solcher Winkel. Durch einfache Messung mit dem Stechzirkel kann man dann den einer gegebenen Länge der Halbperipherie entsprechenden Durchmesser finden (und umgekehrt) (vgl. die Koordinatenabtragung S. 51).

165. Der *Schmiegungskreis* in einem Punkte A einer Kurve wird definiert als die Grenzlage eines veränderlichen Kreises, der die Kurve in A berührt und sie außerdem in einem beweglichen und sich dem Punkte A unbegrenzt nähernden Punkte B schneidet.

Der Radius ϱ des Schmiegungskreises für einen Punkt A einer gegebenen Kurve kann oft auf folgende Weise bestimmt werden (Fig. 160): Von einem Punkte B der Kurve fällt man ein Lot BC auf die Tangente a in A. Ein Kreis, der a in A berührt und durch B geht, schneidet die Linie BC zum zweiten Mal in einem Punkte D derart, daß

$$CD = \frac{AC^2}{CB}$$

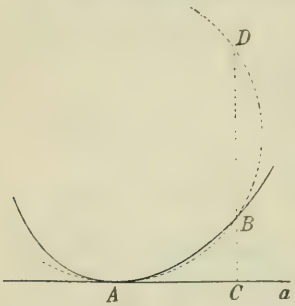


Fig. 160.

wird. Wenn nun B nach A konvergiert, während BC beständig auf a senkrecht ist, so konvergiert CD nach dem Durchmesser 2ϱ des Schmiegungskreises, so daß man hat:

$$2\varrho = \lim \frac{AC^2}{CB}.$$

Diese Formel gilt auch, wenn BC nicht beständig auf a senkrecht ist, falls es nur beim Grenzübergange nach der Normalen in A konvergiert.

166. Von einer ebenen Kurve sagt man, sie erstreckt sich ins Unendliche, wenn kein Kreis existiert, der sie ganz umschließt.

Wenn ein Punkt P sich kontinuierlich auf der Kurve bewegt, so daß sein Abstand von einem festen Punkt O ins Unbegrenzte

wächst und dabei OP sich einer festen Grenzlage nähert, so sagt man, daß der durch die Richtung dieser Grenzlage bestimmte und unendlich entfernte Punkt U auf der Kurve liegt. Erreicht gleichzeitig die Linie PU eine bestimmte Grenzlage, so heißt sie die Tangente der Kurve (*Asymptote*) im Punkte U. Der veränderliche Punkt P nähert sich dann bei seiner Bewegung mehr und mehr dieser Asymptote. Wächst der Abstand des Punktes O von PU ins Unbegrenzte, so sagt man, die Asymptote liegt unendlich fern. Man sieht leicht, daß es gleichgültig ist, wo man den Punkt O annimmt.

Wenn ein eigentlicher Punkt M auf einer ebenen Kurve k durch Zentralprojektion aus einem Projektionszentrum, das außerhalb der Ebene der Kurve liegt, in einen unendlich fernen Punkt M' projiziert wird, so liegt dieser auf der Kurve k', in die k projiziert wird. Ferner kann man leicht erkennen, daß die Tangente in M an k als die Asymptote in M' an k' erscheint. Umgekehrt wird eine Asymptote von k in eine Tangente von k' projiziert.

Anmerkung: Jede in der Praxis vorkommende Kurve (*praktische Kurve*) wird von einem wirklichen Punkt, z. B. der Spitze eines Bleistifts, beschrieben; die Kurve läßt sich immer in eine endliche Anzahl geradliniger Stücke teilen (vgl. die Fußnote S. 24, 25). Als *Halbtangente* einer praktischen Kurve MN in dem Punkte M müssen wir den von M ausgehenden Halbstrahl ansehen, welcher eine möglichst lange von M ausgehende Strecke mit der Kurve gemein hat. Um aber den Anschluß an die früher gegebene theoretische Definition (161) zu erreichen, können wir sagen, daß wir auch bei der praktischen Kurve die Halbtangente als Grenzlage eines Halbstrahles MM_1 auffassen können, nur so, daß, wenn M_1 bei der Bewegung nach M hin eine gewisse Lage erreicht hat, der Halbstrahl MM_1 dann ganz von selbst alle die folgenden Lagen enthalten wird, dergestalt, daß die Grenzlage schon so praktisch erreicht ist.

Als *Schmiegungskreis* einer praktischen Kurve MN in dem Punkte M müssen wir den Kreis ansehen, welcher einen möglichst langen von M ausgehenden Bogen mit der Kurve gemein hat. Auch hier erreichen wir den Anschluß an die theoretische Definition des Schmiegungskreises (165), wenn wir den nach M konvergierenden Punkt M_1 nur so weit führen, daß der Kreis, welcher die Kurve in M berührt und durch M_1 geht, den ganzen Kurvenbogen MM_1 enthält. Man wird bei dieser Auffassung des Grenzbegriffes auch für die praktischen Kurven die in 165 gegebene Formel anwenden können; man muß nur beachten, daß das

Resultat, wie bei allen praktischen Maßbestimmungen, mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist.

Unter Zugrundelegung der hiermit skizzierten praktischen Auffassung der Grenzprozesse wird man alle vorstehenden und nachfolgenden Untersuchungen über theoretische Kurven auch für praktische Kurven unmittelbar verwerten können.

Die Momentanbewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene.

167. *Wenn eine unveränderliche ebene Figur sich in ihrer Ebene bewegt, so kann man zwei willkürliche Lagen dieser Figur zur Deckung bringen durch eine Drehung um einen gewissen Punkt oder durch eine Parallelverschiebung.*

Beweis: Ein Punkt A in der ersten Figur entspreche einem Punkt A_1 in der zweiten Figur. Der Punkt B in der ersten Figur, der mit A_1 zusammenfällt, entspricht einem Punkte B_1 der zweiten Figur, der so liegt, daß $AB = A_1B_1$ wird. Sollte B_1 wieder nach A fallen, so würde eine halbe Umdrehung um den Mittelpunkt von AA_1 die beiden Figuren zur Deckung bringen. Fällt aber B_1 nicht nach A, so können noch zwei verschiedene Fälle eintreten:

1. A, A_1 und B_1 liegen in einer geraden Linie. Dann bringt eine Parallelverschiebung (von der Größe und Richtung der Strecke AA_1) AB mit A_1B_1 zur Deckung.

2. A, A_1 und B_1 liegen nicht in einer geraden Linie. Dann bringt eine Drehung um den Mittelpunkt des durch A, A_1 und B_1 hindurchgelegten Kreises die eine Figur mit der anderen zur Deckung. Dieser Punkt, um den man die eine Figur drehen muß, um sie mit der anderen zur Deckung zu bringen, heißt der *Rotationspol* der beiden Figuren.

168. *Wenn eine unveränderliche Figur sich in ihrer Ebene kontinuierlich bewegt, so gehen die in den einzelnen Punkten der Figur auf den von diesen Punkten beschriebenen Kurven errichteten Normalen in jedem Augenblick durch einen und denselben Punkt (den momentanen Rotationspol) hindurch.*

Dies folgt aus dem vorangehenden Satz, indem man zuerst zwei verschiedene Lagen $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ der beweglichen Figur betrachtet und darauf $A_1B_1C_1\ldots$ sich $ABC\ldots$ unbegrenzt nähern läßt. Die Mittelsenkrechten von AA_1, BB_1, CC_1, ... bilden dann beständig einen Strahlenbüschel, und auch ihre Grenzlagen, die Bahnnormalen in A, B, C, ... bilden deshalb einen Strahlenbüschel.

Man kann den Satz benutzen, um die Tangente an die Bahn,

die von einem willkürlichen Punkt C der beweglichen Figur beschrieben wird, zu konstruieren, wenn die Tangenten der Bahnen a und b für zwei Punkte A und B gegeben sind. Die Normalen von a und b in A und B schneiden einander in O (dem momentanen Rotationspol). OC ist dann die Normale der Kurve, die C beschreibt. Durch diese Methode kann nur die Bahnnormale in O nicht bestimmt werden. Dieser Punkt zeigt in allem ein besonderes Verhalten.

Der benutzte Grenzübergang zeigt zugleich, daß die betrachtete Bewegung von der Lage $ABC\ldots$ aus immer so vor sich geht, daß, wenn A sich auf seiner Bahn in einem bestimmten Sinne bewegt, sich die übrigen Punkte auch auf ihren Bahnen in bestimmtem Sinne bewegen, so daß *eine bestimmte Halbtangente in A und ein bestimmter Momentanpol, der von A verschieden ist, bestimmte Halbtangenten in den übrigen Punkten* (O ausgenommen) *liefern*, nämlich dieselben, die man erhalten würde, wenn die Bewegung eine wirkliche Drehung um O wäre.

169. Wenn eine gerade Linie AB der Figur sich so bewegt, daß sie beständig durch einen festen Punkt geht, so beschreibt der Punkt C der geraden Linie, der im Augenblick in diesen festen Punkt fällt, eine Kurve, die die augenblickliche Lage von AB in C berührt. Dies ist sehr einfach zu zeigen: Beim Übergang zur benachbarten Lage A_1B_1 gelangt C nach C_1; nähert sich nun A_1B_1 der Linie AB, so nähert sich auch die Linie CC_1 der Linie AB, womit der Satz bewiesen ist.

Wenn z. B. eine Strecke AB sich so bewegt, daß A eine gerade Linie a beschreibt, während die Linie AB durch den festen Punkt C hindurchgeht, so beschreibt B eine sogenannte *Konchoide* (Fig. 161). Die Tangente dieser Kurve in B kann dadurch bestimmt werden, daß der momentane Rotationspol O für die Strecke AB der Schnittpunkt der Senkrechten von CA in C mit der Senkrechten von a in A ist. OB ist dann die Normale der Konchoide, und die gesuchte Tangente steht auf OB in B senkrecht.

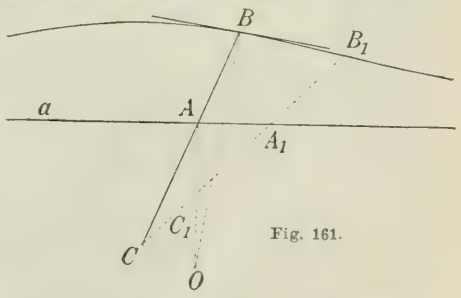


Fig. 161.

Aus 166 folgt sofort, daß die Gerade a eine Asymptote der Kurve ist.

Bögen mit monoton variierender Krümmung (Normbögen).

170. Die Tangenten in zwei Punkten M und N eines gegebenen einfachen Bogens mögen sich in T schneiden (vgl. Fig. 162). Der Winkel ε, den die vorwärtszeigende Halbtangente durchstreicht, wenn der Berührungspunkt den Bogen von M bis N durchläuft, heißt die *Totalkrümmung* des Bogens MN; er wird dem Nebenwinkel des Winkels MTN gleich. Das Verhältnis zwischen ε (in natürlichem Winkelmaß gemessen) und der Bogenlänge MN heißt die *mittlere Krümmung*, während man den umgekehrten Wert dieses Verhältnisses als den *mittleren Krümmungsradius* des Bogens MN bezeichnen kann. Für einen Kreis ist die mittlere Krümmung unabhängig davon, welchen Bogen auf dem Kreis wir wählen; der mittlere Krümmungsradius ist der Radius des Kreises selbst.

Betrachten wir auf einem beliebigen einfachen Bogen einen festen Punkt M und einen beweglichen Punkt N, so verändert sich die mittlere Krümmung für den Bogen MN im allgemeinen mit N. Lassen wir N nach M konvergieren, so kann sich möglicherweise ein eindeutig bestimmter Grenzwert für die mittlere Krümmung herausstellen; dieser Grenzwert heißt dann die *Krümmung* in M und ihr reziproker Wert der *Krümmungsradius* des Bogens in M.

Wir wollen insbesondere einen solchen einfachen Bogen AB betrachten, der in jedem seiner Punkte eine eindeutig bestimmte Krümmung hat und für den diese Krümmung kontinuierlich und monoton variiert, d. h. wenn ein Punkt M den Bogen von A bis B durchläuft, soll die Krümmung, wenn sie nicht konstant ist, sich kontinuierlich ändern und beständig wachsen oder beständig abnehmen. Einen solchen Bogen nennen wir einen *Normbogen*. Wenn ein Teil eines Normbogens konstante Krümmung hat, ist er ein Kreisbogen; wir betrachten aber im folgenden nur solche Normbögen, die keine Kreisbögen enthalten.

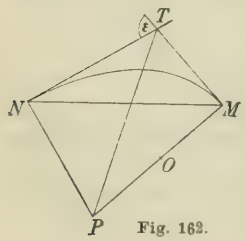


Fig. 162.

Die Tangenten in zwei Punkten M und N eines Normbogens mögen einander in T schneiden, während der Schnittpunkt der Normalen P sei (Fig. 162). Das Viereck $MTNP$ ist konvex auf jeden Fall, wenn $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, und ihm kann ein Kreis über TP als Durchmesser umschrieben werden. Man findet dann

$$TP = \frac{MN}{\sin \varepsilon}.$$

Wenn nun N nach M konvergiert, so findet man

$$\lim \frac{MN}{\sin \varepsilon} = \lim \frac{MN}{\varepsilon} = \varrho,$$

wo ϱ den Krümmungsradius in M bezeichnet, mithin

$$\lim TP = \varrho.$$

Aber da T nach M konvergiert, konvergiert auch P nach einem bestimmten Punkte O, der auf der Normalen in M so liegt, daß $MO = \varrho$ wird, und, wenn ϱ nicht Null und nicht unendlich ist, der konkaven Seite des Bogens in M angehört. Dieser Punkt O heißt der *Krümmungsmittelpunkt* und der Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius ϱ der *Krümmungskreis*.[1]) Dieser berührt die Kurve in M, hat in M dieselbe Krümmung wie die Kurve, und wenn ϱ nicht 0 und nicht ∞ ist, fällt die konkave Seite des Kreises mit der der Kurve zusammen.

171. Der geometrische Ort für die Krümmungsmittelpunkte eines gegebenen Normbogens AB heißt die *Evolute* dieses Bogens. Wir wollen beweisen, daß diese Evolute ein einfacher Bogen ist, der alle Normalen des Bogens AB in den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten berührt. Um aber diesen Beweis durchführen zu können, müssen wir zuerst die sogenannten *Parallelkurven* untersuchen.

Lassen wir einen Punkt M den Bogen AB von A bis B durchlaufen, so führt die Normale des Bogens in M, als ein starres System aufgefaßt, eine ganz bestimmte Bewegung aus. Der Punkt M dieses Systems hat eine bekannte Bahn, nämlich den gegebenen Bogen AB. Die Bahnen der übrigen Punkte heißen *Parallelkurven* des Bogens AB. Es mögen nun (Fig. 163) A und B die Krümmungsmittelpunkte A_1 und B_1 haben, wobei $AA_1 < BB_1$, so daß der Krümmungsradius von A bis B beständig wächst. Auf der Normalen in A betrachten wir einen Punkt P. Wenn die konstante Strecke AP sich so bewegt, daß A den gegebenen Bogen AB durchläuft, während AP beständig zu dem Bogen normal ist, durch-

1) Umgekehrt, falls für einen einfachen Bogen der Normalenschnittpunkt P einer bestimmten Grenzlage O zustrebt, wenn N nach M konvergiert, hat der Bogen den Krümmungsmittelpunkt O. Nach 158 und 160 folgt hieraus z. B., daß der Schmiegungskreis eines Kegelschnittes zugleich Krümmungskreis der Kurve ist.

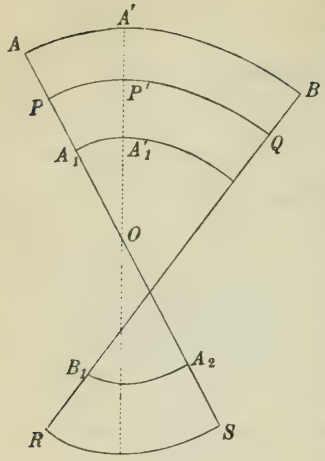


Fig. 163.

läuft P die Parallelkurve PQ. Der augenblickliche Rotationspol (Momentanpol) für die bewegliche Strecke wird A_1. Der Rotationspol für AP und eine neue Lage $A'P'$ soll nämlich gleich weit von A und A' entfernt sein und ebenso von den Normalen AP und $A'P'$. Er läßt sich deshalb bestimmen als der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AA' mit der Halbierungslinie des Nebenwinkels von AOA', wobei O den Schnittpunkt der beiden Normalen bezeichnet. Konvergiert A' nach A, so konvergiert die erste dieser Linien nach der Normalen in A, die andere nach dem Lot auf dieser Normalen im Punkte A_1, da O nach A_1 konvergiert; ihr Schnittpunkt konvergiert also nach A_1, w. z. b. w.

Wenn nun P und A auf derselben Seite von A_1 liegen (wie in der Figur), so haben die von P und A beschriebenen Bahnen gleichgerichtete Halbtangenten, und da AA_1 der Voraussetzung nach der kleinste Krümmungsradius des Bogens AB ist, so daß P und A in jedem Augenblick bei dem Verlauf der Bewegung auf derselben Seite des augenblicklichen Rotationspols liegen, haben die von P und A durchlaufenen Bahnen in jedem Augenblick gleichgerichtete Halbtangenten. Da die von A durchlaufene Bahn ein einfacher Bogen ist, gilt dasselbe auch für die Bahn von P. Folglich:

Wenn P auf derselben Seite von A_1 wie A liegt, wird die von P beschriebene Parallelkurve ein einfacher Bogen, der dieselben Normalen wie der gegebene Bogen hat.

172. Wir betrachten nun die Parallelkurve, die von einem zu Anfang mit A_1 zusammenfallenden Punkt P beschrieben wird. Es ist zunächst klar, daß, sowie P bei der Bewegung aus A_1 in irgendeine neue Lage A'_1 gelangt ist, die Parallelkurve dem Vorstehenden zufolge, jedesmal von dieser Lage aus gerechnet, ein einfacher Bogen ist; sobald man also weiter beweisen kann, daß die Halbtangente der Parallelkurve im Punkte A_1 mit der Halbtangente des Bogens AB in A gleichgerichtet ist, ist bewiesen, daß die *ganze* Parallelkurve ein einfacher Bogen mit denselben Normalen wie der gegebene Bogen ist. Wir führen den Beweis folgender-

maßen: Der von A_1 nach A'_1 gehende Halbstrahl ist sicher gleichgerichtet mit einer Halbtangente eines Punktes des Bogens $A_1A'_1$, der zwischen A_1 und A'_1 liegt, also ist er auch gleichgerichtet mit einer Halbtangente eines Punktes des Bogens AA'. Aber wenn A' nach A konvergiert, konvergiert die letztgenannte Halbtangente nach der Halbtangente des Bogens AB in A und der Halbstrahl $A_1A'_1$ folglich nach einer zu dieser Halbtangente parallelen Grenzlage. Hiermit ist in der Tat bewiesen, daß, wenn P nach A_1 fällt, die von P beschriebene Parallelkurve ein einfacher Bogen ist.

173. Betrachten wir jetzt auf der Normalen BB_1 einen Punkt R, der auf der Verlängerung von BB_1 über B_1 hinaus liegt, so wird die Parallelkurve RS, die R beschreibt, wenn die Normale BB_1 sich in die Lage AA_1 zurückbewegt, ebenfalls ein einfacher Bogen; denn B und R liegen auf entgegengesetzten Seiten des augenblicklichen Rotationspols, die Halbtangenten der von B und R beschriebenen Bahnen sind deshalb entgegengesetzt gerichtet, und dies bleibt so während der ganzen Bewegung. Die von R beschriebene Parallelkurve RS ist also ein einfacher Bogen. Fällt R nach B_1, so ergibt sich genau dasselbe, indem wir ganz ähnliche Betrachtungen anstellen wie vorher für den Fall, wo P nach A_1 fällt. Die Parallelkurve B_1A_2 ($AA_2 = BB_1$) ist also auch ein einfacher Bogen.

Auf der Normalen in A haben wir nun alle Punkte untersucht mit Ausnahme von denen, die zwischen A_1 und A_2 liegen, und es hat sich gezeigt, daß alle von den betrachteten Punkten beschriebenen Parallelkurven einfache Bögen sind, so daß die Punkte, die auf der Verlängerung der Strecke A_1A_2 über A_1 hinaus (den Punkt A_1 selbst mitgerechnet) liegen, Parallelkurven beschreiben, deren konkave Seite mit dem Bogen AB gleichgerichtet ist, während die Punkte, die auf der Verlängerung der Strecke über A_2 hinaus (A_2 mitgerechnet) liegen, Parallelkurven beschreiben, deren konkave Seite dem Bogen AB entgegengesetzt ist.

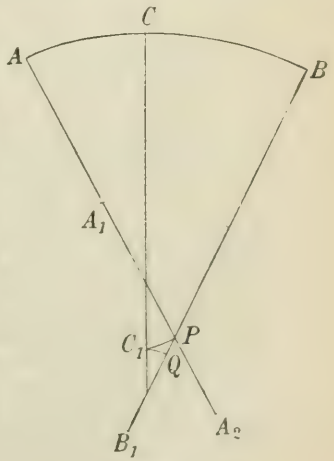


Fig. 164.

174. Es bleiben nur noch die Punkte zu betrachten, die zwischen A_1 und A_2 liegen (Fig. 164). Ein solcher Punkt P wird, indem er der Bewegung der Normalen folgt, einmal in eine Lage C_1 kom-

men, wo er der Krümmungsmittelpunkt für einen Punkt C des Bogens AB ist, und man kann dann aus dem Vorstehenden erkennen, daß der Teil der Parallelkurve, der dem Bogen AC entspricht, ein einfacher Bogen PC_1 ist, und ebenso, daß der Teil, der dem Bogen CB entspricht, gleichfalls ein einfacher Bogen C_1Q ist; aber die beiden einfachen Bögen haben in C_1 dieselbe Halbtangente, die mit der Halbtangente des Bogens CB in C gleichgerichtet ist. Außerdem sind die konkaven Seiten der beiden Bögen voneinander abgewendet. Die ganze Parallelkurve hat also eine Spitze erster Art im Punkte C_1. Folglich:

Jede Parallelkurve, die von einem Punkte zwischen A_1 und A_2 beschrieben wird, besteht aus zwei einfachen Bögen von der Art, daß eine Spitze erster Art entsteht, wo diese Bögen zusammenstoßen.

In allen Fällen haben die Parallelkurven dasselbe Normalensystem wie der gegebene Bogen AB.

175. Nachdem wir so die Parallelkurven untersucht haben, gehen wir nun über zur Betrachtung der *Evolute*, d. h. des geometrischen Ortes der Krümmungsmittelpunkte.

Für zwei beliebige Punkte M und N des gegebenen Normbogens AB seien die Krümmungsmittelpunkte M_1 und N_1 und es sei $MM_1 < NN_1$, indem wir annehmen, daß der Krümmungsradius von A bis B wächst. Es sei ferner die Totalkrümmung des Bogens $MN < \frac{\pi}{2}$.

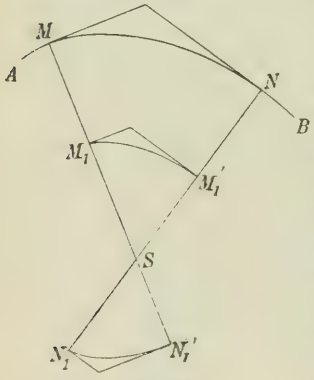


Fig. 165.

Der Schnittpunkt S der beiden Normalen muß dann notwendigerweise so liegen, wie die Fig. 165 angibt, einerseits auf der Verlängerung von MM_1 über M_1 hinaus und anderseits auf der Strecke NN_1. Dies zeigt sich daraus, daß die Parallelkurve $M_1M'_1$ des Bogens MN ein einfacher Bogen ist, dessen konkave Seite in M nach derselben Richtung hin liegt wie die des Bogens MN in M, und da die Linien MM_1 und NN_1 gleichzeitig Normalen beider Bögen sind, liegt ihr Schnittpunkt S auf derselben Seite der Punkte M und M_1. Betrachten wir aber die Parallelkurve $N_1N'_1$ des Bogens NM, so liegt ihre konkave Seite in N_1 nach der entgegengesetzten Richtung wie die des Bogens MN in N, und da die Linien MM_1 und NN_1 Normalen beider Bögen $N_1N'_1$ und NM sind, muß der Schnittpunkt S zwischen N und N_1 liegen.

Wenn nun N nach M konvergiert, konvergiert N_1 nach M_1, und der Halbstrahl M_1N_1 muß nach der Verlängerung von MM_1 über M_1 hinaus konvergieren. Also hat die Evolute von MN in M_1 eine bestimmte Halbtangente, die auf die Normale des gegebenen Bogens in M fällt und nach der Seite hin läuft, nach der die konkave Seite des Bogens liegt. Da die Richtung dieser Halbtangente sich beständig nach derselben Seite dreht, wenn M den Bogen MN und M_1 gleichzeitig den entsprechenden Bogen M_1N_1 der Evolute durchläuft, muß die Evolute ein einfacher Bogen sein. Also:

Die Evolute eines Normbogens AB ist immer ein einfacher Bogen. Die Normalen des Bogens AB sind die Tangenten der Evolute.

176. *Hilfssatz:* Wenn ein Kreis mit dem Mittelpunkt O zwei Punkte M und N mit einem einfachen Bogen b gemein hat (Fig. 166), findet sich auf dem Stück MN von b mindestens ein Punkt Q, der zwischen M und N liegt und für den die Normale durch O geht.

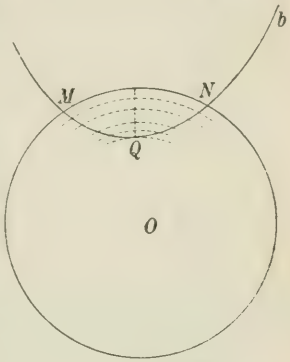


Fig. 166.

Enthält nämlich der Bogen MN Punkte, die innerhalb des Kreises liegen, so muß sich auf ihm wenigstens ein Punkt Q finden, der von O weniger oder höchstens ebensoweit entfernt ist wie jeder andere Punkt des Bogens MN; in diesem Punkt Q hat der Bogen dieselbe Tangente wie der Kreis mit dem Mittelpunkt O, der durch Q geht, so daß OQ eine Normale wird. Liegen von dem Bogen MN keine Punkte innerhalb des gegebenen Kreises, so muß sich in jedem Falle (wenn der Bogen nicht ganz mit dem Kreis zusammenfällt) mindestens ein Punkt Q finden, für den der Abstand OQ ein Maximum wird, und für diesen Punkt wird OQ eine Normale.

Man benutzt diese Betrachtung zur praktischen Konstruktion der durch O gehenden Normalen eines gegebenen Bogens b, indem man zunächst, wie die Fig. 166 zeigt, einen Kreis mit dem Mittelpunkt O zeichnet, der den Bogen in zwei Punkten M und N schneidet, und darauf den Radius des Kreises so verändert, daß die Schnittpunkte näher zusammenrücken. Um dann den Punkt Q zu finden, kann man den Kreisbogen MN und die analogen Bögen der anderen Kreise halbieren, worauf man eine Kurve durch die gefundenen Mittelpunkte legt. Diese Kurve läuft nach dem Punkt Q hin.

177. Wir können nun den Satz beweisen: *Ein Normbogen hat höchstens drei Punkte mit einem Kreis gemein.* Existierten nämlich vier gemeinsame Punkte M, N, P, Q (die in dieser Reihenfolge auf dem Bogen liegen), so könnte man von dem Mittelpunkt des Kreises eine Normale nach jedem der Bögen MN, NP, PQ, also mindestens drei Normalen ziehen. Es würden also von einem Punkt drei Tangenten an die Evolute gehen, aber dies ist nicht möglich, da die Evolute ein einfacher Bogen ist.

Weiter erkennt man, daß von einem Kreis (Fig. 167), der durch drei beliebige Punkte M, N, P eines Normbogens AB gelegt wird, der Mittelpunkt O so liegt, daß von ihm zwei Normalen an den Bogen (nämlich eine an den Bogen MN und eine andere an den Bogen NP), also zwei Tangenten an den Bogen A_1B_1 der Evolute gehen. O muß deshalb in dem von dem Bogen A_1B_1 und den Strecken A_1S und B_1S begrenzten Flächenstück liegen.

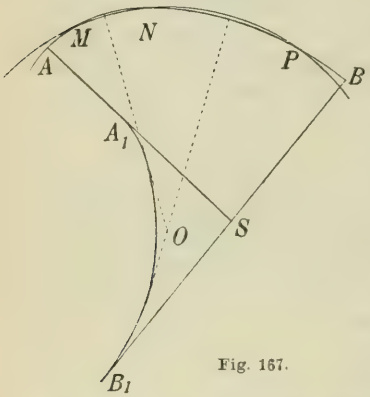


Fig. 167.

Ebenso muß von einem Kreis, der den Bogen in A berührt und durch B geht oder den Bogen in B berührt und durch A geht, der Mittelpunkt auf dem Rande (A_1S oder B_1S) des genannten Flächenstückes liegen.

Läßt man A fest, während B sich auf dem Normbogen nach A zu bewegt, so ändert das genannte Flächenstück sich derart, daß alle seine Punkte nach A_1 hin konvergieren, während B gegen A konvergiert. Hieraus folgt:

1. *Der Krümmungskreis in A ist die eindeutig bestimmte Grenzlage für einen veränderlichen Kreis durch drei verschiedene Punkte M, N, P des Bogens, die alle auf beliebige Weise nach A konvergieren* (M kann insbesondere in A festliegen).

2. *Der Krümmungskreis in A ist die eindeutig bestimmte Grenzlage eines Kreises, der den Bogen in A berührt und durch einen nach A konvergierenden beweglichen Punkt B des Bogens geht.* Der Krümmungskreis ist also gleichzeitig der *Schmiegungskreis* des Bogens (vgl. 165).

3. *Der Krümmungskreis in A ist die eindeutig bestimmte Grenzlage für einen Kreis, der durch A geht und die Kurve in einem anderen nach A konvergierenden Punkte berührt.*

4. *Wenn zwei verschiedene Punkte M und N des Bogens nach A konvergieren, so konvergiert der Kreis, der den Bogen in M berührt und durch N geht, nach dem Krümmungskreis in A.* Dieser Fall umfaßt die beiden vorhergehenden als besondere Fälle.

Wir haben bei unserem Beweis die veränderlichen Punkte alle auf einer Seite von A angenommen. Man sieht aber sofort, daß die Überlegung hiervon nicht abhängig ist.

178. Wir wollen nun die *Lagenbeziehung des Krümmungskreises zum Kurvenbogen* untersuchen. Es möge der Normbogen AB die Evolute A_1B_1 haben ($AA_1 < BB_1$) und M ein beliebiger Punkt des Bogens sein (Fig. 168). Ein Kreis mit dem Mittelpunkt A_1, der durch M geht, kann außer M keinen Punkt mit dem Bogen gemein haben; dies folgt sofort aus dem Hilfssatz in 176, da von A_1 keine andere Normale an den Bogen AB (d. h. keine Tangente an die Evolute) gezogen werden kann als AA_1. Da nun weiter die Normale des Bogens in M die Evolute in einem Punkt M_1 berührt, so daß der Bogen AM und der zugehörige Evolutenbogen A_1M_1 auf derselben Seite der Linie MM_1 liegen, muß der Winkel zwischen der Halbtangente des Bogens MA in M und der Strecke MA_1 ein spitzer sein, es muß der Bogen AM also auf jeden Fall in der Umgebung von M innerhalb des Kreises liegen und muß deshalb auch ganz in dem Innern des Kreises enthalten sein. Hiernach erkennt man leicht, daß der Bogen MB außerhalb des Kreises liegt. Also: *Wenn ein Punkt M den Bogen AB von A bis B durchläuft, so nimmt der Abstand A_1M beständig zu.* Hieraus folgt, daß *der Bogen AB ganz außerhalb des Krümmungskreises in A liegt.*

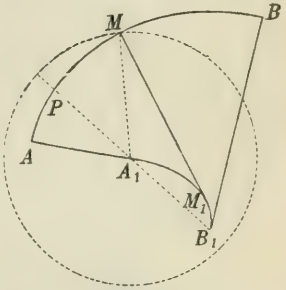


Fig. 168.

Auf ganz ähnliche Weise zeigt man nun, daß, *wenn ein Punkt M den Bogen AB von A bis B durchläuft, der Abstand B_1M beständig zunimmt, woraus man schließt, daß der ganze Bogen AB innerhalb des Krümmungskreises in B liegt.*

Der Krümmungskreis in einem Punkt M des Bogens AB, der zwischen A und B liegt, muß den Bogen AM einschließen, während der Bogen BM außerhalb des Kreises liegt. Also: *Der Krümmungskreis berührt den Normbogen in M so, daß der Bogen in M von der einen Seite des Kreises zur andern übergeht.*

179. Da die Verlängerung der Strecke B_1A_1 über A_1 hinaus den Bogen AB in einem Punkte P schneidet, hat man zufolge der

vorstehenden Betrachtung

$$AA_1 < PA_1, \quad BB_1 > PB_1,$$

also

(1) $$BB_1 - AA_1 > A_1B_1.$$

Daraus sieht man, daß der Krümmungskreis in B den Krümmungskreis in A umschließt. Folglich: *Von zwei beliebigen Krümmungskreisen eines Normbogens liegt der kleinere immer ganz innerhalb des größeren.*

Der Schnittpunkt S der Normalen AA_1 und BB_1 eines beliebigen Normbogens AB liegt so, daß sein Abstand von einem veränderlichen Punkt M, der den Bogen AB von A bis B durchläuft, beständig abnimmt. Dies läßt sich auf ganz ähnliche Weise zeigen wie bei den analogen Betrachtungen in 178 (Fig. 169): Man geht aus von einem Kreis mit dem Mittelpunkt S, der M enthält, und zeigt, daß dieser Kreis außer M keinen Punkt mit dem Bogen AB gemein haben kann, woraus man sogleich folgert, daß der Abstand SM entweder beständig wächst oder beständig abnimmt; da ferner der Punkt S auf der Verlängerung von AA_1 über A_1 hinaus liegen muß, weil die Evolute A_1B_1 ein einfacher Bogen ist, muß die Halbtangente des Bogens MB, jedenfalls für eine Lage von M in der Nähe von A, einen spitzen Winkel mit MS bilden, und es folgt, daß der Abstand SM beständig abnehmen muß. Man hat sonach

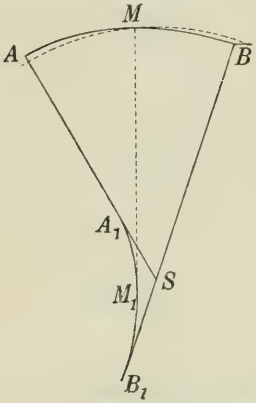


Fig. 169.

$$AS > BS.$$

Wenn nun S auf der Strecke BB_1 liegt, folgt hieraus weiter

$$AA_1 + A_1S > BB_1 - B_1S,$$

oder

(2) $$BB_1 - AA_1 < A_1S + B_1S$$

Daß diese Ungleichung auch dann gültig ist, wenn S nicht auf der Strecke BB_1 liegt, sondern auf der Verlängerung dieser Strecke über B hinaus, ist unmittelbar ersichtlich. Die Ungleichungen (1) und (2) kann man so zusammenfassen:

$$A_1B_1 < BB_1 - AA_1 < A_1S + B_1S.$$

Dieses Ergebnis werden wir im folgenden (s. 181) auf den Beweis eines wichtigen Satzes über die Länge des Evolutenbogens anwenden.

180. Indem wir beständig annehmen, daß der Normbogen AB von A bis B einen wachsenden Krümmungsradius hat, können wir folgendes wichtige Resultat ableiten: *Schneidet ein Kreis mit dem Mittelpunkt O den Normbogen AB in drei Punkten M, N und P, die in dieser Reihenfolge einander auf dem Normbogen von A bis B folgen, so fällt der Teil des Normbogens, der zwischen M und N liegt, außerhalb des Kreises, während der Teil, der zwischen N und P liegt, in das Innere des Kreises fällt* (Fig. 170).

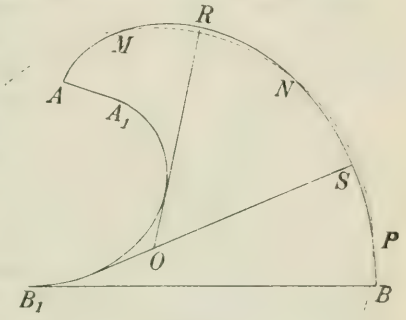


Fig. 170.

Von O geht nämlich eine Normale OR an den Bogen MN und eine Normale OS an den Bogen NP, und da nach dem Vorstehenden $OR > ON > OS$, ist der Satz bewiesen.

Dieses Resultat kann für die praktische Zeichnung von Normbögen verwendet werden. Kennt man nämlich vier aufeinanderfolgende Punkte M, N, P, Q eines Normbogens, so liegt der Bogen NP in dem kleinen sichelförmigen Flächenstück NP, das von zwei Kreisen, einem durch M, N, P gehenden und einem durch N, P, Q gehenden, begrenzt wird. Indem man diese Tatsache benutzt, kann man oft mit großer praktischer Sicherheit einen Normbogen zeichnen, wenn man nur eine geringe Anzahl von Punkten auf ihm kennt. Wie man hierbei auch Tangenten des Bogens, die man kennt, verwerten kann, ist sofort einleuchtend.

181. Teilt man den Bogen AB (Fig. 171) in kleinere Bögen AM, MN, NB und wendet die in 179 gefundenen Ungleichungen auf jeden von diesen Bögen an, so findet man

$$A_1M_1 < MM_1 - AA_1 < A_1S + M_1S,$$

$$M_1N_1 < NN_1 - MM_1 < M_1T + N_1T,$$

$$N_1B_1 < BB_1 - NN_1 < N_1U + B_1U$$

und hieraus durch Addition

$$\text{Umfang } A_1M_1N_1B_1 < BB_1 - AA_1 < \text{Umfang } A_1STUB_1.$$

Auf diese Weise erkennt man, daß $BB_1 - AA_1$ kleiner als jede dem Evolutenbogen A_1B_1 umschriebene konvexe gebrochene Linie mit den Endpunkten A_1 und B_1 und größer als jede dem Evolutenbogen einbeschriebene konvexe gebrochene Linie ist. Aber daraus folgt, daß die Größe $BB_1 - AA_1$ die Länge des Evolutenbogens angeben muß. Also: *Die Länge der Evolute eines Normbogens ist gleich der Differenz der Krümmungsradien in den Endpunkten des Normbogens.*

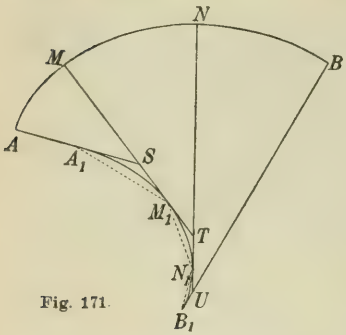


Fig. 171.

Den Normbogen kann man sich sonach dadurch entstanden denken, daß eine gerade Linie auf der Evolute rollt; ein Punkt dieser Linie beschreibt dann den Normbogen. Die verschiedenen Punkte der Linie beschreiben dabei eine Reihe Parallelkurven dieses Normbogens.

182. In einem Endpunkt eines Normbogens kann der Krümmungsradius auch 0 oder unendlich werden. Aber diese Fälle verlangen keine wesentlich neue Betrachtung. Ist der Krümmungsradius unendlich, so wird die Normale in dem Punkt eine Asymptote der Evolute. Schließlich wollen wir bemerken, daß ein Normbogen sich auch ins Unendliche erstrecken, einen unendlich fernen Punkt haben kann. Der Krümmungsradius muß dann gleichzeitig, wenn der Punkt ins Unendliche rückt, ins Unendliche wachsen. Die Evolute berührt in diesem Falle die unendlich ferne Linie.

183. Die Kurven, die in der Praxis irgendwelche Bedeutung haben, kann man sich gewöhnlich durch Zusammensetzung einer endlichen Anzahl von Normbögen entstanden denken (*Normkurven*). Soll die Kurve eine überall kontinuierlich variierende Krümmung haben, so müssen zwei aufeinanderfolgende dieser Normbögen, wo sie aneinanderstoßen, denselben Krümmungskreis haben. Die den einzelnen Normbögen entsprechenden Evolutenbögen bilden zusammen die *Evolute* der ganzen Kurve, und jedes endliche Stück der Kurve kann man sich durch Rollen einer geraden Linie auf der Evolute entstanden

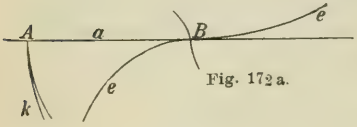


Fig. 172a.

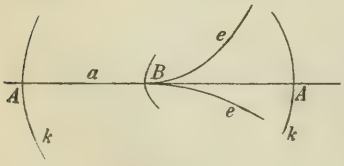


Fig. 172b.

denken. Die Evolute ist eine einfache Kurve und kann die gewöhnlichen Besonderheiten darbieten. In den Figuren 172a, b, c ist gezeigt, wie die gegebene Kurve k beschaffen sein muß, damit die Evolute e a) einen Wendepunkt, b) eine Spitze erster Art, c) eine Spitze zweiter Art besitzt. Im ersten Falle hat die Kurve k im allgemeinen eine Spitze zweiter Art, indem der Punkt A der Linie a, wenn dieselbe auf e rollt, zwei Bögen mit derselben Halbtangente in A beschreibt, deren konkave Seite dem Punkte B zugekehrt ist. Nur der Punkt B selbst beschreibt beim Rollen eine Kurve mit Wendepunkten. In dem zweiten Falle besteht die Kurve k aus zwei Normbögen, die in A zusammenstoßen, ohne daß das Aussehen der Kurve irgendeine Besonderheit darbietet. Der Krümmungsradius von k besitzt in A ein Maximum oder Minimum. Im dritten Falle hat die Kurve k eine Spitze zweiter Art.

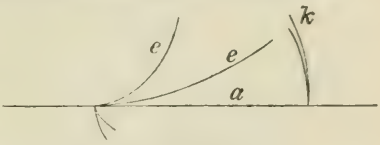


Fig. 172c.

184. Eine *Ellipse* wird durch ihre Achsen in vier Quadranten zerlegt, von denen jeder ein Normbogen ist. Eine *Hyperbel* wird durch die Hauptachse in vier Normbögen und eine *Parabel* von ihrer Achse in zwei Normbögen zerlegt. Wir begnügen uns damit, die Ellipse zu betrachten. Die Fig. 173 stellt einen Quadranten dar. In zwei beliebigen Punkten A und B sind die Normalen gezeichnet, ihr Schnittpunkt ist S. Nach dem Steinerschen Satz ist das Sechseck 1 2 3 4 5 6, von dem die Ecken 3, 4 unendlich fern liegen und 1 mit S identisch ist, einer Parabel umschrieben und die Linien 1 4, 2 5 und 3 6 gehen deshalb durch denselben Punkt R. Wenn B nach A konvergiert, konvergiert S nach dem Krümmungsmittelpunkt A_1 von A, und man erkennt aus der Figur, daß S bei diesem Grenzübergang sich in der Richtung von A nach 6 bewegt, d. h. S liegt auf der Strecke AA_1. Ebenso zeigt man, daß S auf der Verlängerung des Krümmungsradius BB_1 liegt, und so läßt sich genau wie in 175 beweisen,

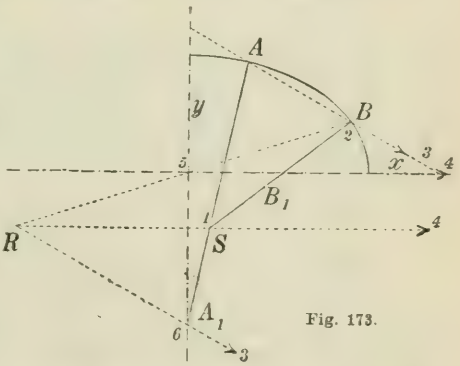


Fig. 173.

daß die Evolute des Ellipsenquadranten ein einfacher Bogen ist, woraus rückwärts folgt, daß der Ellipsenquadrant selbst ein Normbogen ist. (vgl. 178—179). Zur praktischen Zeichnung des Ellipsenquadranten benutzt man in der Regel die Krümmungskreise in den Scheitelpunkten samt einem weiteren Punkt des Bogens. Die ganze Evolute der Ellipse besteht aus vier kongruenten einfachen Bögen, die in den Krümmungsmittelpunkten der Scheitelpunkte zusammenstoßen, so daß die Evolute vier Spitzen in diesen Punkten besitzt.

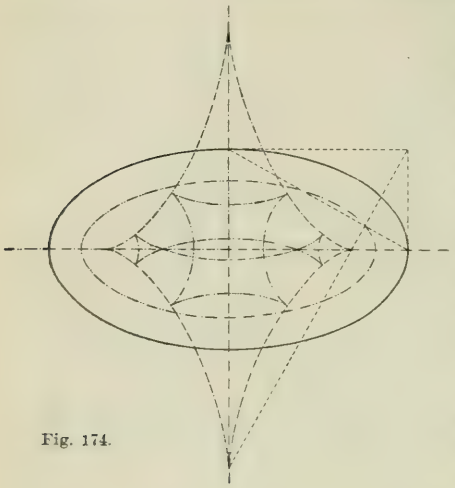


Fig. 174.

Die Fig. 174 zeigt außer der Evolute gleichzeitig drei innere Parallelkurven der Ellipse, eine ovale, eine andere mit vier Spitzen und eine dritte mit vier Spitzen und zwei Doppelpunkten.

Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man beweisen, daß *jede algebraische Kurve (oder allgemeiner jede analytische reguläre Kurve) aus einer endlichen Anzahl Normbögen zusammengesetzt ist.*[1])

Rollkurven.

185. Wir betrachten diejenige Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene, welche durch das Rollen einer gegebenen Kurve r auf einer anderen gegebenen Kurve f bestimmt wird. Die Bahnen, die dann die verschiedenen Punkte beschreiben, heißen *Rollkurven*. Wir wollen zunächst zeigen, daß der augenblickliche Rotationspol (Momentanpol) im allgemeinen in den Berührungspunkt O der Kurven fällt.

Zuerst betrachten wir den Fall, wo eine der Kurven, z. B. f

1) Die vorstehenden Untersuchungen lassen sich also insbesondere auf diese Kurven anwenden. Sie gehen aber wesentlich weiter und sind vollständiger als die gewöhnlichen parallellaufenden Untersuchungen der Differentialgeometrie.

eine gerade Linie ist (Fig. 175). Die Kurve r sei wenigstens in der Umgebung von O eine einfache Kurve. Lassen wir r so weit auf f weiter rollen, bis der Punkt M_1 von r in den Punkt M_2 von f fällt ($OM_2 = \widehat{OM_1}$). Die Halbtangente t_1 in M_1 (für den Umlaufssinn OM_1) kommt dann mit dem Halbstrahl t_2 von f (der in die Richtung OM_2 fällt) zur Deckung. Für die beiden Figuren M_1t_1 und M_2t_2 ergibt sich ein Rotationspol o, der als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

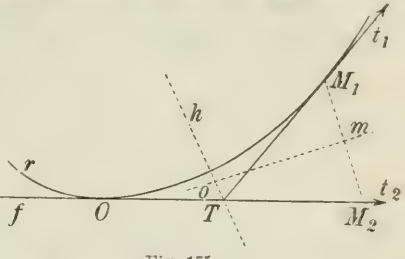


Fig. 175.

m von M_1M_2 und der Halbierungslinie h des Winkels OTM_1 konstruiert werden kann. Wenn nun M_1 nach O konvergiert, so behaupten wir, konvergieren die Linien h und m nach der Normalen und Tangente der Kurve r in O, und ihr Schnittpunkt konvergiert nach O, so daß dieser Punkt wirklich der gesuchte Momentanpol ist. Daß h nach der Normalen in O konvergiert, folgt daraus, daß T nach O und der Winkel OTM_1 gegen einen gestreckten konvergiert. Daß m nach der Tangente konvergiert, ist bewiesen, sobald man gezeigt hat, daß die Linie M_1M_2 nach der Normalen konvergiert, und dies gelingt auf folgende Weise (Fig. 176): Auf der Tangente in O tragen wir in der Richtung OT die Strecken OA = der Sehne OM_1 und $TB = TM_1$ ab. Wir finden dann

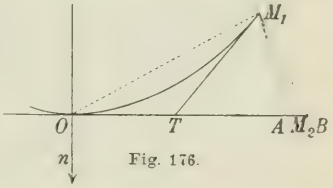


Fig. 176.

$$OA < \widehat{OM_1} < OB,$$

folglich

$$OA < OM_2 < OB,$$

die Strecke M_1M_2 liegt also innerhalb des Dreiecks AM_1B, und da die Richtungen M_1A und M_1B auf den Halbierungslinien der Winkel M_1OA und M_1TB senkrecht stehen, so daß sie beide nach derselben Richtung n, die mit der Normalen in O zusammenfällt, konvergieren, konvergiert auch M_1M_2 nach dieser Richtung.

Wie man sofort sieht, gilt das Resultat auch für die Bewegung, bei der die gerade Linie f auf r rollt; die Bahn eines jeden Punktes von f heißt dann eine *Evolvente* von r.

Daraus erkennt man u. a., daß *jede Evolvente einer einfachen Kurve r eine Normkurve ist.* Die Kurve r ist Evolute aller ihrer Evolventen.

186. Wir betrachten nunmehr den Fall, wo die Kurven r und f in der Umgebung von O einfache Bögen sind und ihre konvexen Seiten einander zukehren (Fig. 177). Wir tragen auf ihnen die gleichlangen Bögen OM_1 und OM_2 ab und finden den Rotationspol O für die beiden Figuren M_1t_1 und M_2t_2 als den Schnittpunkt der Halbierungslinie h des Winkels T_1TT_2 (dessen Nebenwinkel durch die Richtungen t_1 und t_2 bestimmt wird) mit der Mittelsenkrechten m von M_1M_2. Die erste Linie h konvergiert nach der Normalen n in O; in dem Dreieck T_1TT_2 konvergieren nämlich T_1 und T_2 beide nach O, während die Winkel des Dreiecks bei T_1 und T_2 nach Null konvergieren, so daß auch die dritte Ecke T in allen Fällen nach O konvergieren muß. Die andere Linie m konvergiert nach der gemeinsamen Tangente der Kurven in O. Trägt man nämlich auf t eine den Bögen OM_1 und OM_2 gleiche Strecke OM ab (Fig. 178), so konvergieren die Richtungen M_1M und MM_2 zufolge 185 nach derselben Normalenrichtung n und die Richtung M_1M_2 muß deshalb auch nach n konvergieren, so daß die Mittelsenkrechte m von M_1M_2 nach t konvergiert. Der Momentanpol ist also der Schnittpunkt von n und t, d. h. der Punkt O.

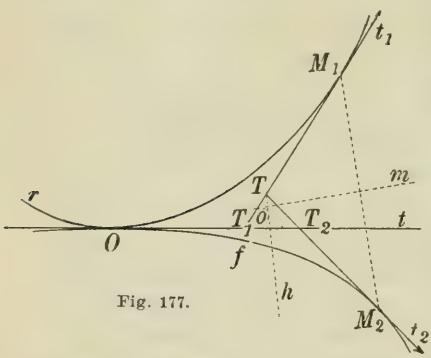


Fig. 177.

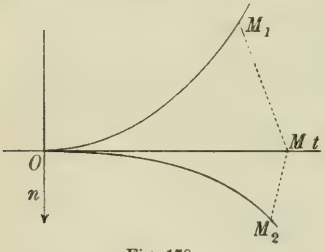


Fig. 178.

187. Endlich betrachten wir den Fall, daß die Kurven r und f nach derselben Seite hin konvex sind, wobei wir indessen die Betrachtung so einschränken müssen[1]), daß wir voraussetzen, die Kurven

1) Weitergehende Untersuchungen findet man in der Abhandlung des Verfassers *Die Geometrie der Wirklichkeit*, Acta mathematica 1914.

sind Normkurven und haben in A verschiedene Krümmungskreise (Fig. 179). Wir tragen wie zuvor die gleich großen Bögen OM_1 und OM_2 ab und bestimmen den Momentanpol der Figuren M_1t_1 und M_2t_2. Nach dem Vorstehenden genügt es zweierlei zu beweisen: *erstens*, daß die Grenzlage für den Schnittpunkt T der Tangenten in M_1 und M_2 O wird, wenn M_1 und M_2 nach O konvergieren, *zweitens*, daß die Richtung M_1M_2 nach der Normalen n in O konvergiert.

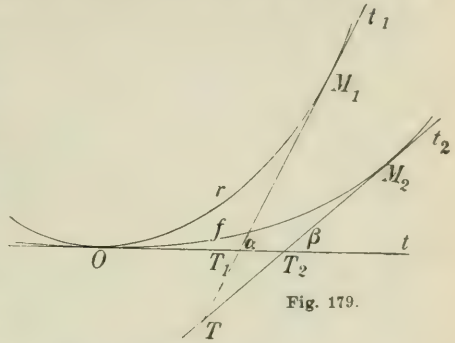


Fig. 179.

Das erste beweisen wir wie folgt: die Tangenten in M_1 und M_2 mögen die Tangente t in T_1 und T_2 schneiden. Das Dreieck T_1TT_2 verändert sich nun so, daß T_1 und T_2 nach O konvergieren, so daß die Seite T_1T_2 gegen Null konvergiert. Wenn man daher zeigen kann, daß eine der anderen Seiten, z. B. TT_2 auch nach Null konvergiert, so ist klar, daß T nach O konvergieren muß. Zu diesem Zweck untersuchen wir die Winkel des Dreiecks. Die Nebenwinkel der Winkel OT_1M_1 und OT_2M_2 bezeichnen wir mit α und β. Die mittlere Krümmung der beiden Bögen OM_1 und OM_2 kann man, wenn die Länge der Bögen mit s bezeichnet wird, durch $\frac{\alpha}{s}$ und $\frac{\beta}{s}$ ausdrücken, und da von diesen Größen vorausgesetzt ist, daß sie bestimmte voneinander verschiedene Grenzwerte haben, hat ihr Verhältnis einen bestimmten von 1 verschiedenen Grenzwert. Das Verhältnis $\frac{\alpha - \beta}{\alpha}$ hat also einen bestimmten von Null verschiedenen Grenzwert k, und da

$$\frac{TT_2}{T_1T_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)},$$

findet man

$$\lim \frac{TT_2}{T_1T_2} = \lim \frac{\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{1}{k} \quad (\neq \infty).$$

Aber hieraus folgt, daß $\lim TT_2 = 0$, so daß T gleichzeitig mit T_2 nach O konvergiert. (Wir haben T_1, T_2 und T verschieden vorausgesetzt; ist dies nicht der Fall, so hat man ja unmittelbar $TT_2 = 0$; wir haben weiter vorausgesetzt, daß T nicht unendlich fern liegt, und diese Voraussetzung ist immer gestattet, wenn

man den Bogen OM_1 klein genug wählt, im anderen Falle würde nämlich $\frac{\alpha - \beta}{s}$ beim Grenzübergang beständig den Wert Null annehmen können, wie klein auch s würde, und dies würde bedeuten, daß die beiden Kurven in O dieselbe Krümmung haben.)

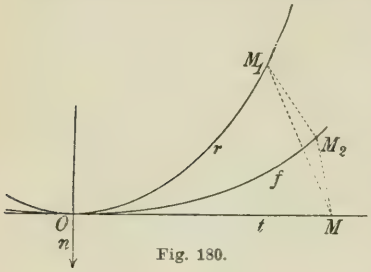


Fig. 180.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß die Richtung $M_1 M_2$ nach der Normalen in O konvergiert. Wir tragen (Fig. 180) auf der Tangente t die Strecke $OM = \overline{OM_1} = \overline{OM_2}$ ab und betrachten das Dreieck $M_1 M_2 M$. Da $M_1 M$ und $M_2 M$ nach der Normalen n in O konvergieren, sind die Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 von r und f in O nach 165 durch die Gleichungen bestimmt

$$2\varrho_1 = \lim \frac{\overline{OM}^2}{\overline{MM_1}}, \quad 2\varrho_2 = \lim \frac{\overline{OM}^2}{\overline{MM_2}},$$

also wird

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \lim \frac{MM_2}{MM_1}.$$

Aber wenn $\lim \frac{MM_2}{MM_1} \neq 1$, muß die Seite $M_1 M_2$ in dem Dreieck $M_1 M_2 M$ nach derselben Richtung konvergieren wie die beiden anderen Seiten $M_1 M$ und $M_2 M$. Sonst würde sich nämlich ergeben $\lim \frac{MM_2}{MM_1} = 1$.

Im folgenden wollen wir nun beständig voraussetzen, daß *die betrachteten Kurven r und f in ihrem Berührungspunkte O nicht zusammenfallende Krümmungskreise besitzen, und wir können dann mit Gewißheit behaupten, daß O der Momentanpol ist.*

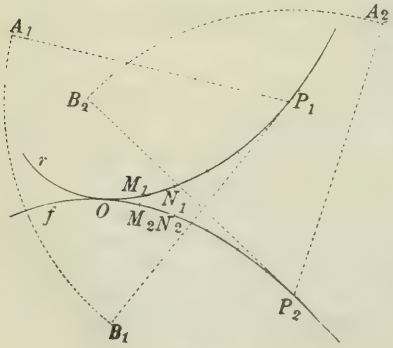


Fig. 181.

188. Um die Rollkurve zu konstruieren, die von einem Punkte A_1 beschrieben wird, wenn r auf f rollt, wählen wir auf r eine Reihe Punkte $M_1 N_1 \ldots P_1$, und finden auf f die entsprechen-

den Punkte $M_2 N_2 \ldots P_2$, so daß die Bögen OM_1, ON_1, $\ldots$ OP_1 den Bögen OM_2, ON_2, $\ldots$ OP_2 der Reihe nach gleich sind (Fig. 181). (Wenn die Bogenlänge nicht exakt abgetragen werden kann, wählt man die Punkte so, daß die Sehnen $OM_1 = M_1N_1 = \ldots OM_2 = M_2N_2 \ldots$ einer passend gewählten kleinen Strecke gleichgemacht werden.) Hierauf suchen wir die verschiedenen Lagen, die A_1 einnimmt, wenn $M_1, N_1, \ldots P_1$ nacheinander auf $M_2, N_2, \ldots P_2$ fallen. Für P_1 und P_2 führt man das so aus, daß man die Tangenten P_1B_1 und P_2B_2 zieht, den Kreisbogen A_1B_1 mit dem Mittelpunkt P_1 schlägt und diesen in seine neue Lage A_2B_2 (mit dem Mittelpunkt P_2 und dem Radius A_1P_1) überführt, wodurch A_2 bestimmt ist. Der Kreis B_2A_2 berührt die Rollkurve in A_2. Praktisch reicht es deswegen aus, Kreise mit den Mittelpunkten $M_2, N_2, \ldots P_2$ und den Radien M_1A_1, N_1A_1, $\ldots P_1A_1$ zu schlagen. Alle diese Kreise berühren die gesuchte Kurve, und diese ist deshalb graphisch mit hinreichender Genauigkeit bestimmt.

189. *Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes einer Rollkurve* (Fig. 182). Der Punkt A_1 $(\neq O)$ beschreibe die Rollkurve A_1A_2, wo A_2 der Lage von r entspricht, die diese Kurve annimmt, wenn M_1 nach M_2 gelangt $(\widehat{OM_2} = \widehat{OM_1})$. Die Normale in A_1 ist die Linie A_1O und die Normale in A_2 ist A_2M_2. Die beiden Normalen schneiden einander in N, und wenn M_1 und M_2 nach O, A_2 nach A_1 konvergieren, konvergiert N nach dem Krümmungsmittelpunkt der Rollkurve in A_1. Wir wollen nun sehen, wie sich dieser Krümmungsmittelpunkt bestimmen läßt.

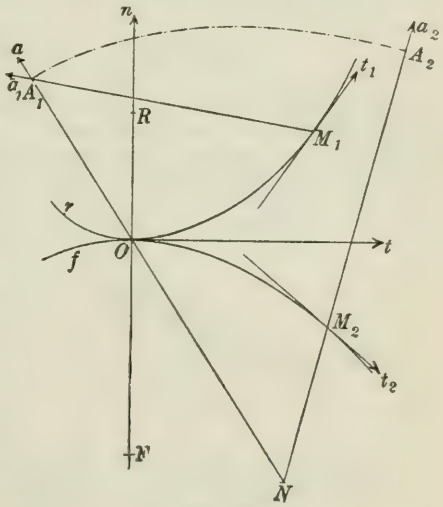


Fig. 182.

Den Normalen in A_1 und A_2 gibt man solche positive Richtungen a und a_2, daß diese bei der Bewegung von A_1 nach A_2 kontinuierlich ineinander übergehen, und der Linie M_1A_1, die bei der Rollbewegung in M_2A_2 übergeht, gibt man eine entsprechende positive Richtung a_1. Die gemeinsame Tangente und Normale

der Kurven r und f in O versieht man mit den positiven Richtungen t und n, und zur Bestimmung der Winkel führt man einen solchen positiven Umlaufsinn ein, daß $\sphericalangle (tn) = +\frac{\pi}{2}$ wird. Endlich erteilt man den Tangenten in M_1 und M_2 solche positive Richtungen t_1 und t_2, daß sie beim Grenzübergang kontinuierlich in t übergehen.

Man findet dann folgende Beziehung zwischen den Winkeln:

$$(aa_2) = (aa_1) + (a_1a_2) = (aa_1) + (t_1t_2),$$

woraus

$$(aa_2) = (aa_1) + (tt_2) - (tt_1).$$

Dividiert man diese Gleichung durch die Bogenlänge $s = \overset{\frown}{OM_1} = \overset{\frown}{OM_2}$, so erhält man

$$\frac{(aa_2)}{s} = \frac{(aa_1)}{s} + \frac{(tt_2)}{s} - \frac{(tt_1)}{s}.$$

Lassen wir nun M_1 und M_2 nach O konvergieren, so konvergieren alle Glieder auf der rechten Seite nach bestimmten Grenzwerten. Zunächst hat man nämlich

$$\lim \frac{(tt_1)}{s} = \frac{1}{\varrho_1}, \quad \lim \frac{(tt_2)}{s} = \frac{1}{\varrho_2},$$

wenn $\varrho_1 = OR$ und $\varrho_2 = OF$ die Krümmungsradien von r und f im Punkt O bedeuten, mit bestimmten Vorzeichen (positiv in der Richtung n) genommen, und weiter findet man aus der Betrachtung des Dreiecks OA_1M_1

$$\lim \frac{(aa_1)}{s} = \lim \frac{\sin (aa_1)}{\overline{OM_1}} = \lim \frac{\sin (\overline{OM_1}, a_1)}{\overline{OA_1}},$$

also

$$\lim \frac{(aa_1)}{s} = \frac{\sin (ta)}{\overline{OA_1}}.$$

So erhält man schließlich

$$(1) \qquad \lim \frac{(aa_2)}{s} = \frac{\sin (ta)}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}.$$

Diesen Wert bezeichnen wir mit k.

Aus der Betrachtung des Dreiecks NOM_2 folgt aber

$$\frac{\sin (aa_2)}{\overline{OM_2}} = \frac{\sin (\overline{OM_2}, a)}{\overline{M_2N}},$$

also

$$\lim \frac{\sin (aa_2)}{\overline{OM_2}} = \lim \frac{\sin (\overline{OM_2}, a)}{\overline{M_2N}} = k.$$

Da nun der Zähler in dem Verhältnis $\frac{\sin(O\overline{M_2}, a)}{M_2\overline{N}}$ nach $\sin(ta)$ konvergiert und $\sin(ta)$ und k nicht gleichzeitig Null sein können (weil $\varrho_1 \neq \varrho_2$), konvergiert der Nenner M_2N beim Grenzübergang nach einem bestimmten Grenzwert, so daß N nach einem bestimmten Punkt A_1' auf a konvergieren muß. Die Existenz des Krümmungsmittelpunktes A'_1 ist damit bewiesen, und es wird $\frac{\sin(ta)}{OA'_1} = k$.

Die Formel (1) liefert nun

$$\left(\frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA_1'}\right)\sin(ta) = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}.$$

Diese Formel bestimmt den gesuchten Krümmungsmittelpunkt A_1'.

Betrachtet man verschiedene Punkte P auf a, so entspricht jedem ein bestimmter Krümmungsmittelpunkt P' auf a derart, daß

$$\left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OP'}\right)\sin(ta) = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \tag{2}$$

wird. Fällt a mit n zusammen, so wird $(ta) = 90^0$, also

$$\frac{1}{OP} - \frac{1}{OP'} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}. \tag{3}$$

Macht man $OP = \varrho_1$ $(\neq 0)$, so erhält man $OP' = \varrho_2$, also *fällt von der Bahn, die von dem augenblicklich in den Krümmungsmittelpunkt R der Kurve r fallenden Punkt P beschrieben wird, der Krümmungsmittelpunkt mit dem Krümmungsmittelpunkt F der festen Kurve f zusammen.* Vergleicht man (2) mit (3), so erkennt man weiter, *daß jedes Punktepaar P und P' von n durch Projektion auf a ein paar zusammengehörige Punkte P und P' auf dieser Linie liefert.*

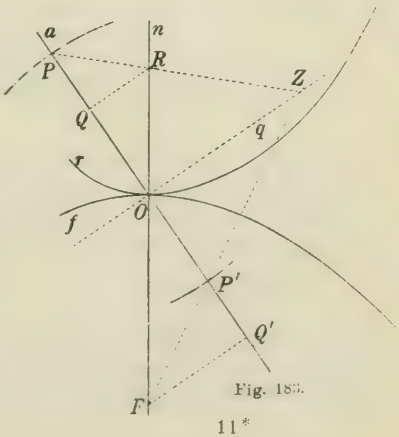


Fig. 183.

Hieraus leitet man nun eine einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes P' ab, der zu einem beliebig gegebenen Punkte P

von a gehört (Fig. 183). R und F werden auf a in Q und Q' projiziert, man findet dann (wenn a von t und n verschieden ist):

$$\frac{1}{OP} - \frac{1}{OP'} = \frac{1}{OQ} - \frac{1}{OQ'}$$

oder

$$\frac{1}{OP} - \frac{1}{OQ} = \frac{1}{OP'} - \frac{1}{OQ'}.$$

Hieraus folgt durch Vereinigung der Brüche

$$\frac{QP}{OP \cdot OQ} = \frac{Q'P'}{OP' \cdot OQ'}.$$

Die beiden letzten Faktoren OQ und OQ' in den Nennern dieser Brüche sind unmittelbar zu QR und $Q'F$ proportional und können deshalb durch diese Werte ersetzt werden. Indem wir gleichzeitig die Brüche umkehren, erhalten wir

$$\frac{OP \cdot QR}{QP} = \frac{OP' \cdot Q'F}{Q'P'}.$$

Aber diese Gleichung sagt aus, daß die Linien PR und $P'F$ auf einer senkrecht zu a durch O gezogenen Linie p dieselbe Strecke

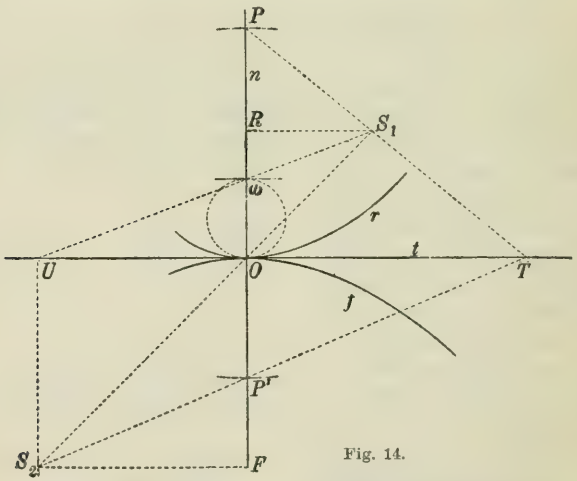


Fig. 14.

OZ abschneiden. Man findet damit folgende Konstruktion: *Man ziehe PR bis zum Schnitt mit dem auf a in O errichteten Lot und verbinde den Schnittpunkt Z mit F. Diese Verbindungslinie schnei-*

det a in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkt P' (Euler-Savarysche Konstruktion).

Aus der Konstruktion geht unmittelbar hervor, daß, *wenn P die Linie a durchläuft, die von P und P' beschriebenen Punktreihen projektiv werden, und diese Punktreihen haben einen einzigen Doppelpunkt, nämlich O.*

Dieser Satz gilt auch dann, wenn a mit n zusammenfällt, da die Punktreihen auf der beliebigen Linie a durch Projektion der Punktreihen auf n entstehen. Für einen Punkt P von n kann man deshalb den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt P' auf folgende Weise bestimmen (Fig. 184): Parallel zu der Tangente t wird $RS_1 = OR$ und $FS_2 = OF$ abgetragen, so daß S_1S_2 durch O geht. Die Linien S_1P und S_2P' schneiden dann t in demselben Punkt T; da nämlich die Punktreihen $(ORP\ldots)$ und $(OFP'\ldots)$ projektiv sind, mit O als einzigem Doppelpunkt, werden die Strahlenbüschel $S_1(ORP\ldots)$ und $S_2(OFP'\ldots)$ zueinander perspektiv mit der Perspektivitätsachse t.

190. Die Konstruktion zeigt zugleich, wie man zu einem gegebenen Punkt P' den entsprechenden Punkt P finden kann. Läßt man P' auf n in unendliche Entfernung rücken, so fällt P in einen Punkt ω, der dadurch bestimmt ist, daß die Linie $S_1\omega$ auf t ein Stück $OU = OF$ (das mit FS_2 gleichgerichtet ist) abschneidet. In dem Punkt ω hat die Bahn einen unendlich großen Krümmungsradius. Dasselbe gilt aber für alle Punkte, die aus ω durch senkrechte Projektion auf die verschiedenen geraden Linien a durch O (die Linie t ausgenommen) entstehen. Alle diese Punkte liegen auf einem Kreis über $O\omega$ als Durchmesser, welcher der *Wendekreis* heißt. Der Punkt ω selbst heißt der *Wendepol*.

Die auf S. 162 gefundene Gleichung (1)

$$\lim \frac{(aa_2)}{s} = \frac{\sin(ta)}{OA_1} - \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$$

zeigt, daß der Winkel (aa_2) für hinreichend kleine positive Werte von s sein Vorzeichen beibehält, solange die Größe auf der rechten Seite ihr Vorzeichen nicht wechselt. Hieraus erkennt man, daß, wenn für ein Stück der von A_1 beschriebenen Rollkurve (Fig. 182) $OA_1 \neq 0$ und $\frac{\sin(ta)}{OA_1}$ entweder beständig größer oder beständig kleiner als $\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$ ist, die Normale und damit die Tangente für dieses Stück monoton variiert, so daß das Kurvenstück für Totalkrümmungen $< \pi$ ein einfacher Bogen ist; hierbei ist jedoch noch

vorauszusetzen, daß die beiden Halbtangenten eines jeden Punktes des Kurvenstücks verschieden sind, und es wird diese Bedingung immer dann erfüllt sein, wenn bei der Rollbewegung die Kurve r auf der einen Seite von f liegen bleibt.

Alle Punkte innerhalb des Wendekreises beschreiben Bahnen, deren konkave Seite im Augenblick vom Momentanpol abgekehrt ist, während die Punkte außerhalb des Kreises Bahnen beschreiben, deren konkave Seite dem Momentanpol zugekehrt ist (vgl. Fig. 184).

Punkte, die im Augenblick auf der Tangente (aber außerhalb O) liegen, beschreiben Bahnen, deren gemeinsamer Krümmungsmittelpunkt nach der Formel (2) S. 163 in dem Momentanpol liegt, und wenden die konkave Seite diesem Punkte zu.

Den Punkt, der im Augenblick im Momentanpol liegt, haben wir bisher von unseren Untersuchungen ausgeschlossen. Um auch über die von diesem Punkt beschriebene Bahn Aufschluß zu erhalten, betrachten wir die Figuren 175, 177, 179; indem der Punkt M_1 bei dem Rollen der Kurve r auf f sich dem Punkte M_2 nähert, wird der Halbstrahl M_2M_1 sich einer bestimmten Grenzlage n nähern, die auf die Normale der Kurve f in M_2 fällt; dies geht aus wesentlich denselben Betrachtungen hervor, die wir in 185—187 angestellt haben. Weiter ergibt sich ganz ebenso, daß bei Fortsetzung der Bewegung von M_1 über den Punkt M_2 hinaus die dabei beschriebene Bahn genau dieselbe Halbtangente n haben muß, wenn nur die Kurve r bei der ganzen Bewegung auf der einen Seite von f liegen bleibt; die von M_1 beschriebene Bahn wird dann in M_2 eine *Spitze* aufweisen. Den Krümmungsmittelpunkt erhalten wir als Grenzlage für den Schnittpunkt der beiden Bahnnormalen t_2 und OM_1 (s. die Figuren), wenn M_1 gegen M_2 konvergiert; in den beiden Fällen, die in den Figuren 175 und 177 dargestellt sind, wird die gesuchte Grenzlage, wie unmittelbar ersichtlich, nach M_2 fallen. Der Krümmungsradius ist also Null. In dem dritten Falle (Fig. 179) stellen sich besondere Schwierigkeiten ein; der Krümmungsradius wird dann nicht immer Null sein.

191. *Allgemeine stetige Bewegung in der Ebene.* Wir betrachten eine beliebige, endliche Anzahl verschiedener Lagen Σ_1, Σ_2, Σ_3, ... einer unveränderlichen Figur Σ, die eine vorgeschriebene Bewegung in der Ebene ausführt, wobei diese Lagen in der angegebenen Ordnung durchlaufen werden. Die Rotationspole für je zwei aufeinanderfolgende der Lagen Σ_1, Σ_2, ... seien $A, B, C, D, \ldots$, während die zugehörigen Rotationswinkel von Σ_1 nach Σ_2, von Σ_2 nach Σ_3 usw. die in Fig. 185 angegebenen Größen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

haben mögen. Wir konstruieren eine gebrochene Linie $AB_1C_1D_1\ldots$ derart, daß $AB_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $C_1D_1 = CD$ usw. wird, während $\sphericalangle AB_1C_1 = \sphericalangle ABC_2$, $\sphericalangle B_1C_1D_1 = \sphericalangle BCD_3$ usw. wird. Denken wir uns dann die Figur Σ_1 mit der gebrochenen Linie $AB_1C_1D_1\ldots$ fest verbunden, während diese auf der gebrochenen Linie $ABCD\ldots$ rollt, so kommt Σ_1 der Reihe nach in die Lagen Σ_2, Σ_3, ...

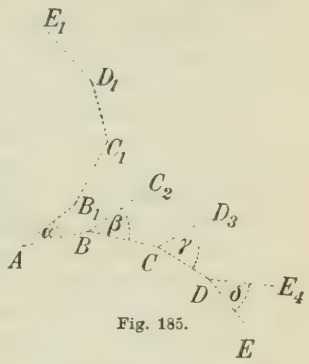


Fig. 185.

Da man nun bei jeder praktisch vorkommenden Bewegung die Anzahl der Lagen Σ_1, Σ_2, ... so groß wählen kann, und entsprechend den Rotationswinkel für zwei aufeinanderfolgende dieser Lagen so klein, daß die Bewegung durch diese Lagen vollkommen bestimmt ist, kann man die Bewegung einer Figur in einer Ebene praktisch immer dadurch zustande bringen, daß man eine bestimmte Kurve r auf einer festen Kurve f ohne zu gleiten rollen läßt und sich die bewegliche Figur mit der Kurve r, während diese auf f rollt, fest verbunden denkt. Dieses praktisch gewonnene Resultat hat aber bei theoretisch genau definierten Bewegungen nur eine beschränkte Gültigkeit.

Die Kurve f ist der geometrische Ort der momentanen Rotationspole für die verschiedenen Lagen der beweglichen Figur, während man eine bestimmte Lage von r als den geometrischen Ort aller Punkte der Figur erhält, die der Reihe nach in die momentanen Rotationspole fallen. r und f berühren sich beständig in dem momentanen Rotationspol. Die zwei Kurven heißen die *Polkurven* der Bewegung.

192. *Beispiel: Eine Strecke AB gleitet mit ihren Endpunkten auf zwei gegebenen geraden Linien a und b, die sich in C schneiden* (Fig. 186).

Den momentanen Rotationspol O findet man als den Schnittpunkt der Senkrechten auf a und b in A und B, CO ist daher ein Durchmesser des durch die Punkte ABC gehenden Kreises, und da die Länge

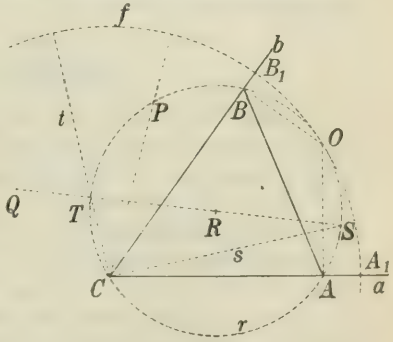


Fig. 186.

AB konstant ist und ebenso natürlich auch die Winkel zwischen AC und BC, ist der Durchmesser CO konstant. Der geometrische Ort für O ist daher ein Kreis f mit dem Mittelpunkt C und dem Radius CO.

Die Kurve r, die auf f rollen soll, um die gegebene Bewegung hervorzurufen, enthält die Punkte, die, indem sie sich mit der Strecke AB bewegen, der Reihe nach in die momentanen Rotationspole fallen. Aber da die Lage von O gegen AB dadurch charakterisiert wird, daß der Winkel zwischen AO und BO konstant ist, muß r der Kreis sein, der durch A, B und C hindurchgeht.

Man sieht nun, daß die Bögen AO und A_1O gleich groß werden (A_1 ist der Schnittpunkt von CA und f), weil OCA Peripheriewinkel im Kreise r und Zentriwinkel im Kreise f ist. Ebenso werden die Bögen BO und B_1O gleich groß. Wenn r auf f rollt, werden also wirklich die Punkte A und B die beiden Geraden a und b durchlaufen. Ein beliebiger Punkt P auf r durchläuft ebenso eine gerade Linie PC.

Ein beliebiger Punkt Q, der nicht auf r liegt, beschreibt eine Ellipse. Denn der Durchmesser ST von r, der durch Q geht, gleitet mit seinen Endpunkten S und T auf den beiden festen zueinander senkrechten Linien CS und CT (Vgl. 132).

Weitere Sätze über Rollbewegungen findet man in folgenden Werken:

L. Burmester, *Lehrbuch der Kinematik I,* Leipzig 1888.

A. Schoenflies, *Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung,* Leipzig 1884.

A. Mannheim, *Principes et développements de géométrie cinématique,* Paris 1894.

Vgl. dazu *Enzyklopädie d. math. Wissensch. IV, 3, 9*: *Kinematik* (Schoenflies-Grübler).

Zyklische Kurven.

193. Die Bahnen der einzelnen Punkte bei der Bewegung, die dadurch bestimmt wird, daß ein Kreis r auf einem festen Kreis f rollt, werden mit einem gemeinsamen Namen als *zyklische Kurven* bezeichnet. In dem Grenzfall, wo f in eine gerade Linie übergeht, heißen sie *Zykloiden*. Wenn r eine gerade Linie wird, heißen sie *Kreisevolventen* (eigentliche oder uneigentliche, je nachdem der sie beschreibende Punkt auf r liegt oder nicht).

In dem allgemeinen Falle, wo weder r noch f unendlich groß werden, unterscheidet man zwischen *Epizykloiden* und *Hypozykloiden*,

je nachdem der Kreis r innerhalb oder außerhalb des Kreises f liegt. In Fig. 187 ist eine Konstruktion für die Punkte einer Epizykloide gegeben, die von einem augenblicklich auf der Zentralen der beiden Kreise liegenden Punkt A beschrieben wird. Wir tragen zwei gleich große Bögen OM und ON auf den beiden Kreisen ab und lassen r so weit rollen, daß M nach N kommt. Die neue Lage A_2 des Punktes A findet man auf folgende Weise: man dreht A um den Mittelpunkt R des rollenden Kreises r in der Anfangslage, bis es in eine solche Lage A_1 kommt, daß M durch dieselbe Drehung nach dem anfänglichen Berührungspunkt O der beiden Kreise fällt; A_1 liegt dann auf dem Radius RM_1, wobei $OM_1 = OM$. Eine darauf folgende Drehung um den Mittelpunkt F des Kreises f, die den Punkt O nach N bringt, führt den Punkt A_1 in den gesuchten Punkt A_2 über. Die genannten beiden Drehungen führen nämlich r in seine neue Lage über. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt N und dem Radius MA schneidet auch den Kreis, der den Mittelpunkt F hat und durch A_1 geht, in dem gesuchten Punkt A_2. Bei dieser Bestimmung muß man sich aber vor der Zweideutigkeit hüten, die dadurch entsteht, daß die genannten Kreise zwei Schnittpunkte haben. Man behalte der Sicherheit halber im Auge, daß $\sphericalangle A_1 F A_2 = \sphericalangle OFN$ sein muß. (Vgl. auch 188).

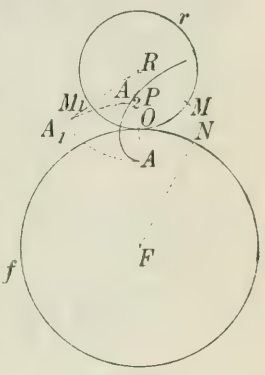


Fig. 187.

Die hier betrachtete Kurve ist geschlossen, wenn der Kreis r nach einer gewissen Zahl von Umläufen um den großen Kreis in seine Anfangslage zurückkehrt, wenn also die Radien der beiden Kreise ein rationales Verhältnis haben. In der Figur ist die Zentrale RF eine Symmetrieachse der Kurve; sie schneidet die Kurve in einem Doppelpunkt P. Die konkave Seite der Kurve bestimmt man nach der früher angegebenen Regel (190). Je nachdem der die Kurve beschreibende Punkt A innerhalb oder außerhalb des Kreises r liegt, erhalten wir eine *gestreckte* oder eine *verschlungene Epizykloide*. In dem Grenzfalle, wo der Punkt A auf dem Kreise r liegt, bekommen wir eine *gespitzte Epizykloide*, die Kurve erhält überall da eine Spitze, wo der Punkt A auf den festen Kreis F fällt (190).

194. Geht der Punkt A bei der Bewegung in einen Punkt auf dem der augenblicklichen Lage von r entsprechenden Wende-

kreis über, so erhält die Kurve in diesem Punkt im allgemeinen einen Wendepunkt, es geht nämlich dann die Krümmung der Kurve von der einen Seite nach der anderen Seite über[1]). Dies gilt aber nicht, wenn A in den Wendepol ω fällt, denn dann bleibt beim Rollen des Kreises r rückwärts und vorwärts der Punkt A außerhalb des Wendekreises; wenn A in den Momentanpol O fällt, entsteht wie oben genannt eine Spitze.

Damit der Punkt A eine Kurve mit Wendepunkten beschreiben kann, muß der Abstand RA der Größe nach zwischen $R\omega$ und RO liegen. Gehen wir von einer Lage aus, wo der Punkt A auf der Zentralen RF der beiden Kreise liegt (Fig. 188), so wird ein Kreis mit dem Mittelpunkt R und dem Radius RA den Wendekreis in zwei Punkten A_1 und B schneiden. Der Bogen OM, den RB auf r abschneidet, werde auf f abgetragen, so daß $\widehat{ON} = \widehat{OM}$ wird. Läßt man r so lange rollen, bis M nach N kommt, so wird A bei der neuen Lage gerade auf den Wendekreis fallen. Denn die in Rede stehende Bewegung läßt sich durch zwei Drehungen ausführen, die erste um R, so daß A nach A_1 kommt, und die andere um F, so daß O nach N kommt, und da die letzte Drehung ebenfalls den zu der anfänglichen Lage von r gehörenden Wendekreis in den zu der neuen Lage von r gehörenden Wendekreis überführt, erlangt A_1 eine Lage A_2 auf diesem letzten Wendekreis; A_2 ist also ein Wendepunkt auf der von A beschriebenen Kurve.

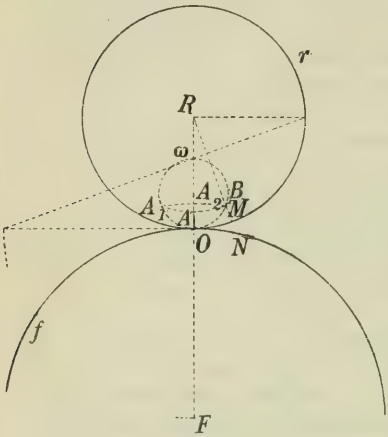


Fig. 188.

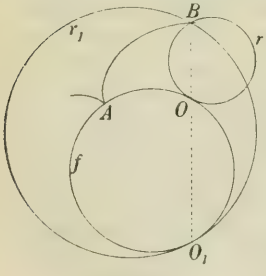


Fig. 189.

195. Jede Epi- oder Hypozykloide kann auf zwei verschiedene Weisen erzeugt werden. Wir wollen den Satz nur für den Fall beweisen, daß der beschreibende Punkt auf dem rollenden Kreise liegt. In Fig. 189

1) Wir schließen dabei den Fall aus, wo der Wendekreis mit r zusammenfällt. Dieser Fall ist in 192 behandelt.

ist die Epizykloide AB dadurch erzeugt, daß r auf f rollt. BO schneidet f in O_1. Man beschreibt nun einen Kreis r_1, der durch B geht und f in O_1 berührt. Da die drei Kreisbögen BO_1, BO und OO_1 denselben Zentriwinkel haben, und die Summe der Sehnen BO und OO_1 gleich BO_1 ist, wird die Summe der Bögen BO und OO_1 gleich dem Bogen BO_1. Da nun $\widehat{AO} = \widehat{BO}$, hat man auch $\widehat{AO_1} = \widehat{BO_1}$. Wenn der Kreis r_1 auf f rollt, beschreibt demnach B dieselbe Bahn, wie wenn r auf f rollt. Die Epizykloiden werden also auf doppelte Weise beschrieben, einmal indem der rollende Kreis dem festen Kreis anliegt, das andere Mal, indem er ihn umschließt. Aus $BO_1 - BO = OO_1$ folgt, daß der Radius von f gleich der Differenz der Radien von r_1 und r ist.

Bei den Hypozykloiden wird dagegen der Radius des festen Kreises gleich der Summe der Radien der beiden rollenden Kreise, durch die sich die Hypozykloide erzeugen läßt. Der rollende Kreis fällt jedesmal in den festen Kreis hinein. Das eine Mal umschließt er den Mittelpunkt des festen Kreises, das andere Mal liegt dieser Mittelpunkt außerhalb von ihm.

196. *Jede gespitzte Epi- oder Hypozykloide ist ihrer Evolute ähnlich.* Die Epizykloide k in Fig. 190 werde von einem Punkte A beschrieben, während r auf f rollt. Der Krümmungsmittelpunkt K werde nach der Euler-Savaryschen Konstruktion bestimmt, indem man die Senkrechte OB auf AO im momentanen Berührungspunkte O mit AR in B schneidet, B ist dann der A diametral gegenüberliegende Punkt von r, und BF schneide AO im Punkte K. Das Verhältnis $\frac{FK}{FB} = \frac{FO}{FP}$ ist konstant. Daraus folgt, daß die Evolute von k der von dem Punkte B beschriebenen Epizykloide ähnlich ist. Aber die von B beschriebene Kurve ist k kongruent, also ist die Evolute auch der Kurve k ähnlich.

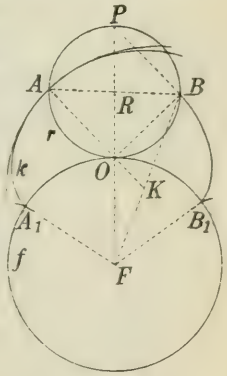


Fig. 190.

Da man nun nach einem früher bewiesenen Satz (181) die Länge eines beliebigen Bogenstückes der Evolute finden kann, kann man auch die Länge eines beliebigen Bogens der gegebenen Epizykloide bestimmen.

Näheres über zyklische Kurven findet man in folgenden Werken: F. Reuleaux, *Theoretische Kinematik*, Braunschweig 1875.

L. Burmester, *Lehrbuch d. Kinematik*, Leipzig 1888, I. Bd., II. Abschnitt.

Chr. Wiener, *Lehrbuch d. darstellenden Geometrie*, Leipzig 1887, II. Bd., VIII. Abschn.

Fr. Schilling, *Über neue kinematische Modelle* (Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 44, 1899, Bd. 51, 1904).

Fr. Schilling, *Über die Anwendungen d. darst. Geometrie*, Leipzig und Berlin, 1904, S. 31—40.

G. Loria, *Spezielle ebene algebraische und transzendente Kurven*, Leipzig 1902, S. 461ff.

Enzyklopädie der math. Wissenschaften, III D, 4: *Besondere transzendente Kurven* (Scheffers).

Hüllkurven.

197. Hat man eine geordnete Reihe von unendlich vielen Kurven, die man sich durch kontinuierliche Änderung einer gegebenen Kurve konstruiert denken kann, so kann man unter Umständen von einem Schnittpunkte einer Kurve a des Systems mit ihrer konsekutiven Kurve sprechen. Man versteht darunter die Grenzlage des Schnittpunktes von a mit einer veränderlichen Kurve des Systems, die sich a unbegrenzt nähert. a kann mehrere Punkte mit seiner konsekutiven Kurve gemein haben, aber wir nehmen an, man könne einen so kleinen Bogen von a ins Auge fassen, daß nur ein Schnittpunkt in Betracht kommt. Unter der Hüllkurve des Systems versteht man dann den geometrischen Ort für die Schnittpunkte der konsekutiven Kurven des Systems. Praktisch wird man eine solche Hüllkurve bilden können, indem man in dem System eine Reihe von Kurven a, a_1, a_2, ... auswählt, so daß diese in der angegebenen Reihenfolge in dem System aufeinander folgen. Die Schnittpunkte von je zwei aufeinanderfolgenden dieser Kurven (Fig. 191) bezeichnen wir mit A, A_1, A_2, ... Sie bilden eine Punktgruppe, die einander mit den Kurven a, a_1, a_2, ... näher und näher rücken und so, indem ihre Anzahl gleichzeitig hinreichend groß wird, die gesuchte Hüllkurve bestimmen.

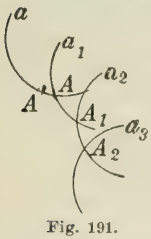


Fig. 191.

Da die Linien AA_1, A_1A_2, . . sich gleichzeitig Tangenten der Systemkurven nähern (wobei wir voraussetzen, daß diese weder eine Spitze noch einen Doppelpunkt in dem betrachteten Punkte haben), erkennt man, daß die Hüllkurve jede der Systemkurven in ihren Schnittpunkten mit der konsekutiven Kurve

berühren. Dieses Resultat hat aber bei theoretisch genau definierten Kurven nur beschränkte Gültigkeit.

Jede einfache Kurve ist die Hüllkurve ihrer Tangenten.

198. Wir nehmen nun an, daß unser Kurvensystem durch Bewegung einer unveränderlichen Kurve a erzeugt sei (vgl. Fig. 191). Bei dem Übergange von a in die benachbarte Lage a_1 wird ein gewisser Punkt A' auf a nach dem Schnittpunkt A von a und a_1 gelangen. Da A' nach A durch Drehung um den Rotationspol der beiden Figuren a und a_1 gelangt und da der hierbei beschriebene kleine Kreisbogen $A'A$ sich der Berührung mit a nähert, berührt a seine Hüllkurve in einem Punkte, dessen Normale durch den momentanen Rotationspol für die Figur a hindurchgeht. Man findet also die Punkte, in denen a die gesuchte Hüllkurve berührt, indem man aus dem momentanen Rotationspol die Normalen auf a fällt.

199. *Beispiel: Die Hüllkurve einer Strecke AB von konstanter Länge, die mit ihren Endpunkten auf zwei zueinander senkrechten Linien a und b gleitet* (Fig. 192).

Der momentane Rotationspol O ist der Schnittpunkt der Normalen von a und b in A und B. Das Lot OM von AB trifft AB in einem Punkte M der gesuchten Kurve. Von dem Kreis f liegt der Mittelpunkt C in dem Schnittpunkt von a und b, sein Radius CO schneidet die Strecke AB in ihrem Mittelpunkt N und ist ihr an Länge gleich. Der Kreis r über NO als Durchmesser geht durch den Punkt M hindurch. Setzen wir nun $\sphericalangle OCM_1 = \alpha$, so wird der $\sphericalangle ONM = 2\alpha$. Also wird der Bogen OM auf dem Kreise r in Gradmaß gleich viermal dem Bogen OM_1 auf dem Kreis f. Da gleichzeitig der Radius von r $^1/_4$ des Radius von f ist, haben die Bögen MO und M_1O dieselbe Länge. Der geometrische Ort für M wird also die Hypozykloide, die M beschreibt, wenn dieser Punkt dem im Kreise f rollenden Kreise r folgt. Die Hypozykloide hat vier Spitzen, die auf a und b liegen. Daß die gefundene Kurve die Strecke AB wirklich in allen ihren Lagen berührt, ist nun ganz klar. Die Kurve heißt eine *Astroide*.

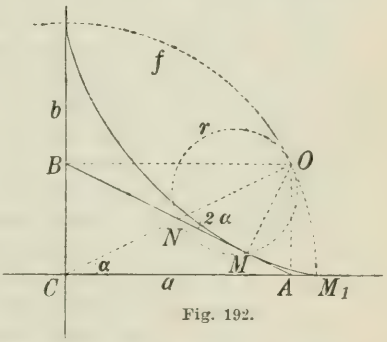


Fig. 192.

Gegenpunktkurven, Brennkurven, Fußpunktkurven.

200. Unter der Gegenpunktkurve einer gegebenen Kurve f bezüglich eines Punktes P versteht man den geometrischen Ort für den Punkt Q, der zu P symmetrisch ist in bezug auf die Tangenten der gegebenen Kurve.

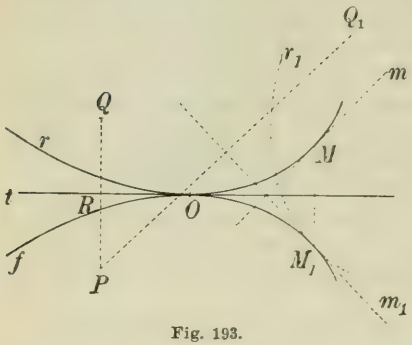


Fig. 193.

Die Gegenpunktkurve ist die Bahn, die Q beschreibt, wenn dieser Punkt mit der zu f bezüglich der Tangente t symmetrischen Kurve r fest verbunden ist und diese Kurve r auf f rollt (Fig. 193). Rollt nämlich r in die neue Lage r_1, so daß M nach M_1, die Tangente m dieses Punktes in die Lage m_1 und Q nach Q_1 rückt, so findet man: die Figur PM_1m_1 ist symmetrisch zu QMm, und da diese mit $Q_1M_1m_1$ kongruent ist, sind die Figuren PM_1m_1 und $Q_1M_1m_1$ symmetrisch, also liegen P und Q_1 symmetrisch zu m_1.

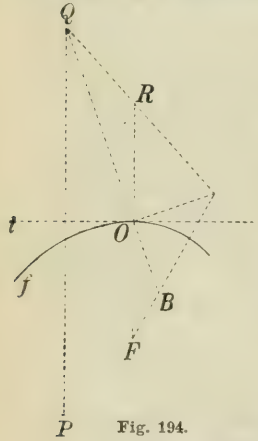


Fig. 194.

Wenn *demnach* P ein leuchtender Punkt ist und f eine spiegelnde Kurve, welche die von P ausgehenden Lichtstrahlen zurückwirft, so werden die zurückgeworfenen Strahlen eine Kurve umhüllen, welche die *Brennkurve* für f bez. des Punktes P heißt. Der Lichtstrahl PO wird aber zurückgeworfen in der Richtung QO, wobei Q symmetrisch zu P bez. der Tangente t in O ist. Da QO nun die Normale der Gegenpunktskurve von f bez. P wird, sieht man, daß *die Brennkurve die Evolute der Gegenpunktkurve ist.*

Kennt man den Krümmungsmittelpunkt F von f, so kann man durch die Euler-Savarysche Konstruktion den Punkt B finden, in dem QO die Brennkurve berührt (Fig. 194).

Unter der *Fußpunktkurve* von f bez. P versteht man den geometrischen Ort für die Projektion von P auf eine Tangente von f. Man erhält also die Fußpunktkurve, indem man die Gegenpunktkurve von dem Zentrum P aus in dem Verhältnis 1 : 2 ähnlich verkleinert.

Achtes Kapitel.

Umdrehungsflächen.

Allgemeine Erzeugung der Kurven und Flächen.

201. Für Raumkurven benutzen wir ganz ähnliche Definitionen der Begriffe *Tangente* und *Halbtangente*, wie wir sie bereits für ebene Kurven aufgestellt haben (161). Ein Bogen AB ohne Doppelpunkte wird im folgenden als *gewöhnlicher Bogen* bezeichnet, wenn jeder Punkt des Bogens, welcher nicht mit einem der Endpunkte A oder B zusammenfällt, zwei entgegengesetzte Halbtangenten aufweist, welche dann zusammen die Tangente in dem Punkte ausmachen; auch die Endpunkte A und B sollen bestimmte Halbtangenten haben, welche zusammen mit ihren Verlängerungen die Tangenten in A und B bilden. Jede Linie, die auf der Tangente im Berührungspunkte senkrecht steht, heißt eine *Normale*. Eine Ebene, die zu der Tangente im Berührungspunkte senkrecht ist, heißt eine *Normalebene* der Raumkurve in diesem Punkte.

Liegen von einem gewöhnlichen Bogen AB die Endpunkte A und B in einer bestimmten Ebene Π, so gibt es auf dem Bogen wenigstens einen Punkt P, der von A und B verschieden ist, und dessen Tangente zur Ebene Π parallel ist. Der Punkt P auf dem Bogen, dessen Abstand von der Ebene ein Maximum wird, muß nämlich die erwähnte Bedingung erfüllen (vgl. 161).

Bei der Zusammensetzung einer Raumkurve aus gewöhnlichen Bögen können Punkte auftreten, für welche die beiden Halbtangenten zusammenfallen. Man sagt, daß die Kurve in einem solchen Punkte eine Spitze hat.

202. Wenn ein Punkt auf der Kurve sich auf ihr so kontinuierlich fortbewegen kann, daß sein Abstand von einem willkürlichen festen Punkt O im Raume ins Unendliche zunimmt, und die Linie OP gleichzeitig eine feste Grenzlage erreicht, so sagt man, daß der durch die Richtung dieser Grenzlage bestimmte unendlich ferne Punkt U auf der Kurve liegt. Hat gleichzeitig die

Linie PU eine bestimmte Grenzlage, so heißt diese die Tangente (Asymptote) der Kurve in U. Der veränderliche Punkt P nähert sich dann bei der Bewegung mehr und mehr dieser Asymptote. Wenn der Abstand des Punktes O von PU ins Unendliche wächst und dabei die Ebene OPU sich einer bestimmten Grenzlage nähert, so sagt man, daß die durch diese Grenzlage bestimmte unendlich ferne Linie eine Asymptote der Kurve im Punkte U ist. Die Wahl des Punktes O hat keinen Einfluß auf das Resultat.

In einer Raumperspektive, bei welcher U einem eigentlichen Punkt U_1 entspricht, entsprechen die gegebene Kurve und ihre Asymptote einer neuen Kurve und deren Tangente in U_1. Umgekehrt, wenn ein eigentlicher Punkt V auf der Kurve bei der Raumperspektive in einen unendlich fernen Punkt V_1 übergeht, so geht die entsprechende Kurve durch diesen Punkt und ihre Asymptote in V_1 entspricht der Tangente der ersten Kurve in V. Diese Sätze folgen unmittelbar aus unseren Definitionen, wenn man den Punkt O im Zentrum der Perspektive wählt. Die Resultate können in folgendem allgemeinen Satz zusammengefaßt werden:

Ein Punkt und die Tangente in ihm, die zu einer gegebenen Kurve gehört, gehen durch eine willkürliche Raumperspektive über in einen Punkt und die Tangente in ihm, die zu der entsprechenden Kurve gehört (vgl. 166).

203. Eine *Fläche* wird erzeugt durch die Bewegung einer Kurve, wobei die Kurve nicht unveränderlich zu sein braucht. Aber selbst wenn die Kurve sich verändert, kann man sich doch denken, daß ihre einzelnen Punkte bestimmte Bahnen haben. Wenn ein Bogen b der Kurve sich aus einer Lage in eine andere bewegt, so durchläuft er ein gewisses Stück der Fläche (ein elementares Flächenstück), das die von den Punkten des Bogens b durchlaufenen Bahnen enthält. Wir setzen voraus, daß das *elementare Flächenstück* folgende Eigenschaften besitzt:

1. Man kann es sich durch zwei Systeme von gewöhnlichen Bögen erzeugt denken, so daß durch jeden Punkt des Flächenstückes ein und nur ein Bogen jedes der beiden Systeme geht.

2. Zwei beliebige Bögen verschiedener Systeme schneiden einander höchstens in einem Punkt, und ihre Tangenten in einem solchen gemeinsamen Punkt sind verschieden.

3. Wenn ein Punkt P sich stetig auf der Fläche bewegt, so werden die Tangenten der beiden erzeugenden Kurven in P sich auch stetig bewegen.

Durch einen beliebigen Punkt A der Fläche mögen die beiden erzeugenden Kurven a und b gehen und außerdem eine be-

liebige Kurve c der Fläche (Fig. 195). Wir wollen nun zeigen, daß die Tangenten der drei Kurven in A derselben Ebene angehören müssen. Eine neue erzeugende Kurve aus demselben System wie a sei mit a_1 bezeichnet und schneide auf b und c die Punkte A_1 und A_1' aus. Eine Ebene durch A, A_1 und A_1' enthält dann die beiden Geraden AA_1 und AA_1' und ist zu einer gewissen Tangente des Bogens A_1A_1' parallel. Wenn A_1' sich auf der Kurve c dem Punkte a nähert, gehen die beiden erstgenannten Geraden AA_1 und AA_1' in die Tangenten von b und c über, während die Tangente des Bogens A_1A_1' nach unserer dritten Voraussetzung[1]) in die Tangente von a übergeht. Es liegen also wirklich die drei Tangenten von a, b und c in derselben Ebene.

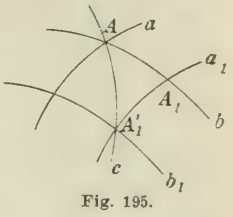


Fig. 195.

Also: *In jedem Punkt A des Flächenstückes findet man eine bestimmte Tangentialebene, d. h. eine Ebene, welche die in A berührenden Tangenten aller Kurven enthält, die auf der Fläche liegen und durch A gehen.*

Das Lot auf der Tangentialebene im Berührungspunkt A heißt die *Normale* in A. Eine Linie, die eine Kurve auf der Fläche berührt, heißt eine *Tangente* der Fläche. Wenn die Tangentialebene in a mit der Fläche keinen durch A gehenden Kurvenbogen gemein hat, so sagt man, die Fläche sei in A *konvex*. Wenn hingegen die Tangentialebene die Fläche in einem oder mehreren durch A gehenden Bögen schneidet, so sagt man, die Fläche sei in A *unkonvex*.

204. Man sagt, daß eine Fläche einen unendlich fernen Punkt U enthält, wenn sie eine Kurve enthält, die durch U geht. Wenn die in U berührenden Asymptoten aller Kurven der Fläche, die durch U gehen, in einer bestimmten Ebene liegen, heißt diese Ebene eine *Asymptotenebene* (eine Tangentialebene in U). In einer Raumperspektive, die U in einen eigentlichen Punkt U_1 überführt, entspricht die Asymptotenebene der in U_1 berührenden Tangentialebene der homologen Fläche. Umgekehrt kann man aus der Existenz dieser Tangentialebene auf die Existenz der Asymptotenebene schließen.

205. Zwei Flächen können einander in einer Kurve schneiden. Die Tangente in einem Punkt dieser Kurve wird bestimmt als

1) Bei dem Beweis brauchen wir so diese Voraussetzung nur für das eine der beiden Kurvensysteme zu machen.

die Schnittlinie der Tangentialebenen der beiden Flächen in dem betreffenden Punkte. Fallen die Tangentialebenen zusammen, so muß die Aufgabe auf andere Weise gelöst werden. Wenn die beiden Flächen in jedem Punkte einer Kurve, die ihnen beiden angehört, dieselbe Tangentialebene haben, so sagt man, die Flächen berühren sich längs dieser Kurve.

Wenn zwei Teile derselben Fläche einander schneiden, so heißt die Schnittkurve eine *Doppelkurve* der Fläche. Zwei Teile einer Fläche können längs einer Kurve k so zusammenstoßen, daß sie sich durch die Bewegung eines Bogens, der eine auf k liegende Spitze besitzt, erzeugen lassen, wobei die Tangente in der Spitze niemals mit der Tangente von k zusammenfällt und die zwei von der Spitze ausgehenden Zweige der Kurve jeder einen der beiden Flächenteile durchlaufen. k heißt in diesem Falle *Spitzkante* der Fläche.

Der Kegel, den die von einem gegebenen Punkt an eine bestimmte Fläche gelegten Tangenten erfüllen, heißt der Fläche *umschrieben*. Er berührt im allgemeinen die Fläche längs der Kurve, die von den Berührungspunkten aller Tangenten gebildet wird. Der Kegel kann sich in besonderen Fällen in verschiedene einzelne Kegel, auch in mehrere Ebenen auflösen.

206. Eine Fläche bringt man zur Anschauung durch die Projektion einer Reihe von Kurven, die auf der Fläche liegen.

Folgende Kurven spielen in dieser Hinsicht eine besondere Rolle: 1. die Berührungskurve k der Kegelfläche, die der Fläche umschrieben werden kann und deren Spitze im Zentrum der Projektion liegt; 2. Doppelkurven d und Spitzkanten s der Fläche. Die Projektionen k', d' und s' von k, d und s heißen die *Hauptlinien* in dem Bilde der Fläche. Die Fläche wird als undurchsichtig angenommen, und die Projektionen der sichtbaren Teile aller Kurven werden voll ausgezogen, während man die Projektionen der unsichtbaren Teile punktiert. In den einfachsten Fällen, wo keine Doppelkurven oder Spitzkanten vorhanden sind, bildet die Kurve k' oder ein Teil von ihr die *Kontur* oder den *Umriß* des Flächenbildes, nämlich die Begrenzung des Teiles der Bildebene, die von dem Bilde der Fläche erfüllt wird. Die Projektion einer Kurve auf der Fläche, die k in einem Punkte P schneidet und deren Tangente in P kein Projektionsstrahl ist, berührt k' in der Projektion des Punktes P.

Will man nur einen Teil einer Fläche darstellen, so muß man natürlich das Bild der Begrenzung dieses Teiles zeichnen.[1])

1) Für die in der Praxis vorkommenden Raumkurven und Flächen *(praktischen Raumkurven und Flächen)* gelten genau ebensolche Be-

Darstellung einer Umdrehungsfläche in Grund- und Aufriß.

207. Eine *Umdrehungsfläche* wird dadurch erzeugt, daß eine Kurve k sich um eine feste gerade Linie a, die Achse der Fläche, dreht. Bei der Umdrehung bleibt jeder Schnittpunkt von k und a fest. Jeder andere Punkt von k beschreibt einen Kreis, dessen Ebene zu a senkrecht ist und dessen Mittelpunkt auf a liegt. Alle diese Kreise heißen *Parallelkreise*. Wenn die Fläche sich um a dreht, so verschiebt jeder Parallelkreis sich in sich selbst. Die ganze Fläche verschiebt sich auch in sich selbst und kann deshalb durch jede Kurve erzeugt werden, die alle Parallelkreise schneidet. Die Kurven, in denen die Fläche von den Ebenen durch a, den *Meridianebenen*, geschnitten wird, heißen *Meridiankurven*. Alle Meridiankurven sind kongruent und bestehen aus zwei symmetrischen Teilen, von denen, wenn der eine gegeben ist, der andere sofort gefunden werden kann.

Ist die erzeugende Kurve k ein gewöhnlicher Bogen, so hat jeder Punkt P der Fläche, der nicht auf der Achse liegt, nach 203 eine einzige bestimmte Tangentialebene. Man muß dabei aber voraussetzen, daß k den durch P gehenden Parallelkreis nicht berührt und nur einen Punkt mit ihm gemein hat. Die Tangentialebene in P läßt sich bestimmen durch die Tangente an k und die Tangente an den Parallelkreis in P. Sie ist senkrecht zu der Meridianebene aP. Die Normale der Umdrehungsfläche in P muß also die Achse schneiden. Dreht man P um a, so schneidet die Tangentialebene a immer in demselben Punkt, dieser wird so die Spitze eines Rotationskegels, der die Fläche längs dem von P beschriebenen Parallelkreis berührt. Diese Kegelfläche kann in besonderen Fällen in eine zu a senkrechte Ebene oder eine Zylinderfläche mit der Achse a übergehen.

Die Normale in P beschreibt bei der Umdrehung um die Achse ebenfalls einen Rotationskegel, dessen Spitze auf der Achse liegt. Diese Spitze ist gleichzeitig der Mittelpunkt einer Kugel, welche die Umdrehungsfläche längs dem gegebenen Parallelkreis berührt.

Die geraden Linien, die durch die Punkte einer gegebenen

---

merkungen, wie wir sie früher für ebene Kurven gemacht haben (S. 141). Jede Tangente einer solchen Kurve hat ein endliches Stück mit der Kurve gemein, und jede Tangentialebene einer derartigen Fläche hat ein endliches Flächenstück mit der Fläche gemein. Die Kurve läßt sich aus einer endlichen Anzahl von geradlinigen Stücken zusammensetzen und die Fläche aus einer endlichen Anzahl ebener Flächenstücke.

Meridiankurve gehen und auf der Ebene der Meridiankurve senkrecht stehen, sind Tangenten der Parallelkreise. Also kann man längs jeder Meridiankurve der Fläche einen Zylinder umschreiben, von welchem die gegebene Meridiankurve ein senkrechter Querschnitt ist.

Wenn die Meridiankurve die Achse a rechtwinklig schneidet, dann erfüllen die Tangenten in dem Schnittpunkt eine gewöhnliche Tangentialebene. Schneidet hingegen der Meridian die Achse a unter einem schiefen Winkel, so erfüllen die Tangenten im Schnittpunkt P einen Rotationskegel. Der Punkt P selbst ist ein singulärer (konischer) Punkt der Fläche.

Hat die Meridiankurve einen nicht auf a fallenden unendlich fernen Punkt U mit einer eigentlichen Asymptote p, so wird die Ebene Π, die wir durch p senkrecht zur Meridianebene legen, eine Asymptotenebene der Fläche im Punkt U. Die Asymptotenebene Π erzeugt bei der Drehung um a einen Rotationskegel, der ein *Asymptotenkegel* der Fläche heißt. Nur wenn p zu a senkrecht ist, geht der Asymptotenkegel über in eine Ebene, die die Umdrehungsfläche längs einer unendlich fernen geraden Linie berührt.

208. In Fig. 196 ist eine Umdrehungsfläche mit lotrechter (zum Grundriß senkrechter) Achse a dargestellt. Die Meridiankurve m (der *Hauptmeridian*) in der Ebene parallel zur Aufrißebene sehen wir als gegeben an. Ein Punkt P der Fläche, dessen Grundrißprojektion P' gegeben ist, wird mit Hilfe des Parallelkreises k durch P bestimmt; die Grundrißprojektion dieses Parallelkreises kann sofort gezeichnet werden. Nachdem man die Grundrißprojektion Q' des Schnittpunktes Q von k und m bestimmt hat, findet man leicht die Aufrißprojektion Q'' (im vorliegenden Falle ergeben sich zwei Lösungen, aber in der Figur ist nur die eine angegeben) und damit

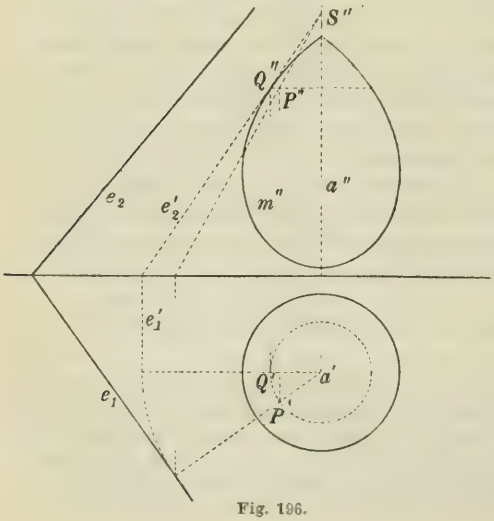


Fig. 196.

die Aufrißprojektion des Parallelkreises. P'' findet man dann durch Hinaufloten von P' auf die Aufrißprojektion des Parallelkreises.

Die Tangentialebene Π in P findet man durch Drehung der Tangentialebene in Q. Von dieser letzten Tangentialebene ist die Aufrißspur e_2' die Tangente der Meridiankurve in Q'' und die Grundrißspur e_1' zur trennenden Achse senkrecht. Diese Grundrißspur dreht man um die Grundrißprojektion a' der Achse herum, bis sie zu $a'P'$ senkrecht wird. Aus der so gefundenen Grundrißspur e_1 ist die Aufrißspur sofort zu finden. Man kann auch die Ebene Π daraus finden, daß sie die Tangente PS der Meridiankurve in P enthalten und auf der Meridianebene Pa senkrecht stehen muß.

209. *An eine gegebene Umdrehungsfläche soll eine Tangentialebene parallel zu einer durch ihre Spuren e_1 und e_2 gegebene Ebene gelegt werden* (Fig. 197). Die gegebene Ebene dreht man um die lotrechte Linie b, bis sie zur Aufrißebene senkrecht wird. Dies kann man auf zwei Arten erreichen; q_2 und r_2 mögen die zugehörigen Aufrißspuren sein. Man zieht nun die Tangenten an den Hauptmeridian parallel zu q_2 und r_2, die Berührungspunkte seien Q und R. Der Berührungspunkt der gesuchten Tangentialebene liegt dann auf dem Parallelkreis durch Q bzw. R, und auf dem Parallelkreis wird der gesuchte Berührungspunkt P durch die zu e_1 senkrechte Linie $a'P'$ bestimmt.

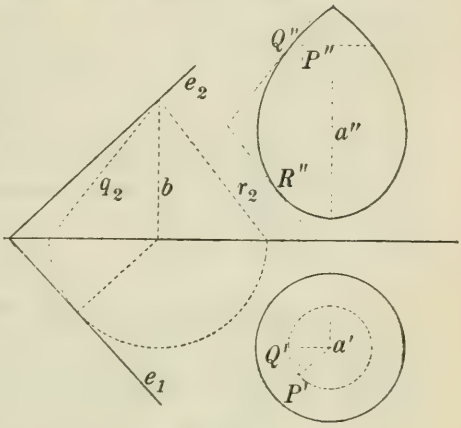


Fig. 197.

210. Wenn die Umdrehungsfläche wie in den vorstehenden Figuren bestimmt wird, so fällt die Kontur im Aufriß mit der Projektion des Hauptmeridians zusammen. Aber es kann Teile des Hauptmeridians geben, die von der Fläche verdeckt werden und somit nicht zu der eigentlichen Kontur gehören. Dagegen gehört die Aufrißprojektion des höchsten und tiefsten Parallelkreises auf der Fläche (wenn solche Kreise existieren) mit zur Kontur.

Die Grundrißkontur wird durch die senkrechte Projektion des größten und kleinsten Parallelkreises auf der Fläche gegeben.

In der folgenden Fig. 198 ist eine Umdrehungsfläche dargestellt, deren Achse a eine schräge Frontlinie und deren Hauptmeridian m ist. Wir suchen die Kontur der Fläche im Grundriß. Längs dem Parallelkreis c legen wir an die Fläche eine berührende Kugel mit dem Mittelpunkt O. Der horizontale Hauptkreis k dieser Kugel schneidet den Parallelkreis in zwei Punkten, deren Tangentialebenen vertikal sind und deren Grundrißprojektionen somit zur Grundrißkontur gehören. Der eine dieser Punkte sei S. Die Tangente t der Kontur in S' ist die Grundrißspur der Tangentialebene in S und fällt mit der Tangente von k' zusammen. t schneidet a' in der Grundrißprojektion der Spitze des längs dem Parallelkreis berührenden Kegels. a' ist eine Symmetrielinie der Kontur. Die Punkte der Kontur auf a' findet man aus den vertikalen Tangenten von m'' und, wo solche nicht existieren, aus den Schnittpunkten von m'' und a''.

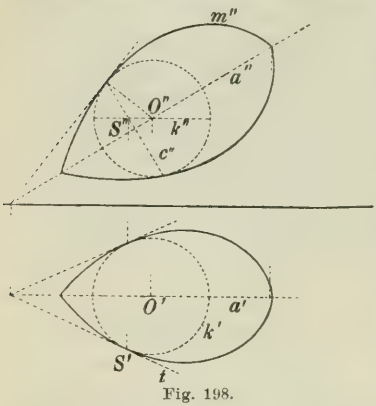


Fig. 198.

Ebene Schnittkurven einer Umdrehungsfläche.

211. Um den Schnitt einer Umdrehungsfläche mit einer Ebene Π zu bestimmen, schneidet man diese Ebene mit einer Reihe von Hilfsebenen, die zu der Achse der Fläche senkrecht sind. Jede solche Ebene schneidet die Fläche in einem Kreis, die Ebene Π in einer geraden Linie. Dieser Kreis und diese Gerade schneiden einander in Punkten der gesuchten Kurve. Die Tangente in einem Punkte der gesuchten Kurve findet man als die Schnittlinie der Ebene Π mit der Tangentialebene der Fläche in dem betrachteten Punkt.

Steht die Achse der Umdrehungsfläche vertikal, so werden die Hilfsebenen horizontal, ihre Schnittkreise werden im Grundriß als Kreise dargestellt, und die Schnittkurve läßt sich sofort zeichnen. Dabei sind folgende Punkte besonders zu beachten:

1. Die Punkte A und B (Fig. 199), die in der Grundrißprojektion den Übergang vom sichtbaren zum unsichtbaren Teil der Kurve bestimmen, also die Punkte auf dem Konturkreis k.

Die Grundrißprojektion der Schnittkurve berührt k' in der Figur in A' und B'.

2. Die Punkte P und Q, die in der Aufrißprojektion den Übergang vom sichtbaren zum unsichtbaren Teil der Kurve bestimmen. Diese liegen auf dem Hauptmeridian und werden gefunden durch den Schnitt dieses Hauptmeridians mit der Frontlinie f, in der die gegebene Ebene Π die Ebene des Hauptmeridians schneidet. Die Aufrißprojektion der Kurve berührt in der Figur die Aufrißprojektion des Hauptmeridians in P'' und Q''.

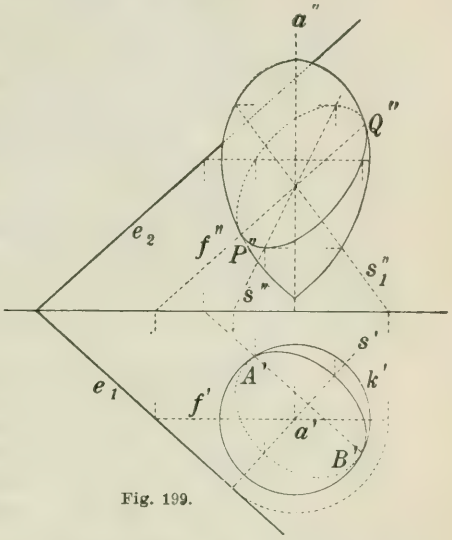


Fig. 199.

3. Die *Scheitel* der Schnittkurve. Eine Ebene durch a senkrecht zur Schnittebene teilt diese und die Umdrehungsfläche symmetrisch und ist deshalb auch eine Symmetrieebene für die Schnittkurve. Die Schnittlinie s dieser Symmetrieebene mit der Ebene Π ist also eine Achse der Kurve und, wenn sie Punkte der Kurve enthält, sind diese Scheitel der Kurve. (Wir nehmen an, daß die Kurve weder Spitzen noch Doppelpunkte enthält.) Die Scheitel finden wir also als die Schnittpunkte von s mit der Fläche. Wir drehen s um a in die Hauptmeridianebene hinein, wobei sie die Lage s_1 erreiche. Dann bestimmen wir die Schnittpunkte von s_1 mit dem Hauptmeridian und drehen nach s zurück.

4. *Unendlich ferne Punkte.* Wenn die Umdrehungsfläche eine oder mehrere Asymptotenkegel besitzt, so bestimmen die Seitenlinien dieser Kegel, die der Schnittebene parallel sind, die unendlich fernen Punkte der Schnittkurve. Schneidet man also jeden der Asymptotenkegel mit einer Ebene, die der Ebene Π parallel ist und durch die Spitze des Kegels geht, so schneiden die Tangentialebenen des Kegels längs den gefundenen Seitenlinien die Ebene Π in den Asymptoten der Schnittkurve (vgl. 218).

212. Der Krümmungskreis in dem Scheitel M eines ebenen

Schnittes einer Umdrehungsfläche kann bestimmt werden, indem man die Schnittebene Π mit einer Kugel schneidet, welche die Umdrehungsfläche längs dem durch M gehenden Parallelkreis k berührt.

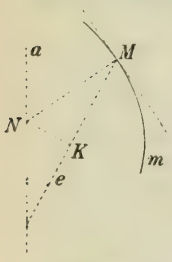


Fig. 200.

Eine Kugel, die durch k und einen Parallelkreis k_1 geht, der einen Punkt M_1 der Schnittkurve in der Nachbarschaft von M enthält, trifft nämlich die Schnittebene in einem Kreis, der die Kurve in M berührt und durch M_1 geht, und dieser Kreis nähert sich dem Krümmungskreis in M, wenn k_1 sich k nähert.

In Fig. 200 ist die Fläche bestimmt durch die Achse a und die Meridiankurve m, die beide in der Zeichenebene liegen. Die Schnittebene Π ist senkrecht auf der Zeichenebene und hat die Spur e. Der Krümmungsradius MK der Schnittkurve im Scheitelpunkt M ist dann die Projektion von MN auf e, wenn MN die Normale von m in M bezeichnet.

Das einschalige Umdrehungshyperboloid.

213. Ein *einschaliges Umdrehungshyperboloid* wird erzeugt durch die Drehung einer geraden Linie f um eine Achse a, die f nicht schneidet und zu f nicht senkrecht ist.

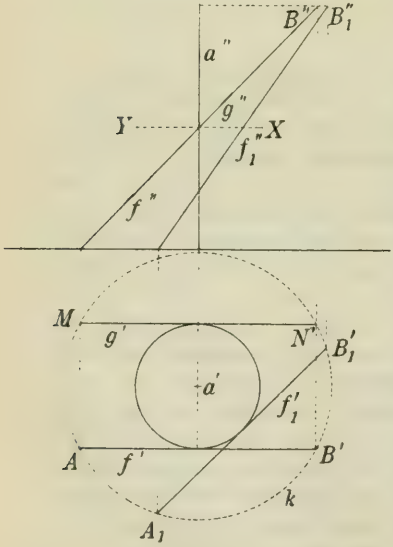


Fig. 201.

Zwei verschiedene Lagen der Erzeugenden, f und f_1, können einander nicht schneiden. Fände sich nämlich ein Schnittpunkt S, so müßte dieser bei der Drehung von f in f_1 entweder fest bleiben oder in einen anderen Punkt auf f_1 übergeführt werden. Das erste ist unmöglich, weil f die Achse a nicht schneidet, und das andere ist unmöglich, weil f auf a nicht senkrecht steht.

Der kleinste Parallelkreis (*Kehlkreis*) der Fläche ist der, dessen Radius der kürzeste Abstand von f und a ist. Parallelkreise, deren Ebenen von der Ebene des Kehlkreises gleichen

Abstand haben, sind gleich groß. Hieraus folgt: 1. *Die Ebene des Kehlkreises ist eine Symmetrieebene der Fläche.* 2. *Der Mittelpunkt des Kehlkreises ist auch Mittelpunkt der Fläche.*

In Fig. 201 ist a zum Grundriß senkrecht und f zum Aufriß parallel angenommen. A ist die Grundrißspur von f und B der Punkt von f, der von der Ebene des Kehlkreises denselben Abstand hat wie A. Die von A und B beschriebenen Parallelkreise liefern dieselbe Grundrißprojektion k. Eine beliebige Erzeugende f_1 der Fläche findet man, indem man auf dem Kreise k gleiche Bögen AA_1 und $B'B_1'$ nach derselben Seite abträgt.

Da f bei der Drehung der Reihe nach alle Punkte der Fläche durchläuft, gehört zu einem beliebigen Punkt P auf der Fläche eine Lage von f. Die Tangentialebene in P enthält diese Erzeugende und ist senkrecht auf der Meridianebene durch P.

214. Da jede Meridianebene eine Symmetrieebene der Fläche ist, liegt auch die zu f bezüglich der Hauptmeridianebene symmetrische Linie g auf der Fläche. Sie hat die Grundrißspur M und schneidet den Parallelkreis durch B im Punkt N. Da die Gerade g alle Parallelkreise schneidet, durchläuft sie bei der Drehung um a die ganze Fläche. Jede Lage von g ist symmetrisch zu einer beliebigen Lage von f bezüglich einer Meridianebene. Denn M und N' liegen bei der Drehung beständig symmetrisch zu A und B' bezüglich eines Durchmessers von k. *Das Umdrehungshyperboloid enthält also zwei verschiedene Systeme von geraden Linien. Zwei Linien desselben Systems schneiden sich nie, zwei Linien verschiedener Systeme schneiden sich immer. Durch jeden Punkt P der Fläche gehen zwei Erzeugende, eine von jedem System. Diese bestimmen die Tangentialebene der Fläche in dem Punkte P.*

Wir sagen von zwei geraden Linien a und f, die einander nicht schneiden und nicht zueinander senkrecht sind, daß sie in *Rechtsstellung* sind, wenn ein Beobachter, der sich längs der einen Linie aufstellt, die andere vor sich rechts nach unten zeigen sieht. Im entgegengesetzten Falle sagen wir, die Linien sind in *Linksstellung*. Wenn eine Person den linken Arm in die Höhe streckt und den rechten Arm vorwärts schräg nach oben hält, können die beiden Arme zwei Linien in Rechtsstellung vorstellen. Streckt die Person hingegen den rechten Arm in die Höhe und den linken Arm vorwärts schräg nach oben, so stellen die Arme zwei Linien in Linksstellung dar. In Fig. 201 sind a und f in Rechtsstellung, a und g in Linksstellung. Die Erzeugenden des Systems f heißen deshalb *Rechtserzeugende*, während die Erzeugenden des Systems g *Linkserzeugende* genannt werden.

215. In Fig. 202 schneidet die Erzeugende f die Parallelkreise b und c in den Punkten B und C. Durch f sind zwei Ebenen gelegt, von denen die eine b und c in N_1 und P_1, die andere in N_2 und P_2 schneidet. Die Linien N_1P_1 und N_2P_2 sind dann Erzeugende des Systems g. Jede von ihnen liegt nämlich symmetrisch zu f bezüglich einer Meridianebene. Wir bezeichnen sie mit g_1 und g_2. Wenn nun f die Fläche durchläuft, während g_1 und g_2 fest bleiben, bleibt beständig $N_1B \parallel P_1C$ und $N_2B \parallel P_2C$. Die Ebenen g_1f und g_2f beschreiben projektive Ebenenbüschel, da ihre Schnittlinien mit der Ebene von b kongruente Strahlenbüschel durchlaufen. Der bewegliche Schnittpunkt F der beweglichen Erzeugenden f und einer festen Ebene Π, die g_1 oder g_2 nicht enthält, ist deshalb beständig der Schnittpunkt entsprechender Strahlen der beiden projektiven Strahlenbüschel, in denen Π die genannten Ebenenbüschel schneidet. Sind die Strahlenbüschel nicht perspektiv, so wird der geometrische Ort für F ein Kegelschnitt. Sind die Strahlenbüschel perspektiv, so schneiden sich entsprechende Strahlen auf einer Erzeugenden g, und der Strahl, den die Büschel gemein haben, ist eine Erzeugende f. In diesem Falle schneidet Π die Fläche in zwei geraden Linien. Folglich: *Eine beliebige Ebene Π schneidet das Umdrehungshyperboloid in einem Kegelschnitt oder in zwei geraden Linien.*

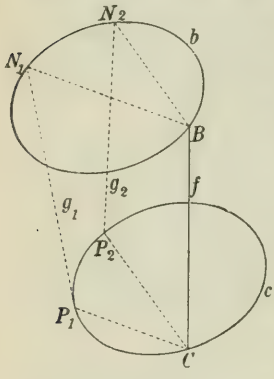


Fig. 202.

Da jede Meridianebene zu zwei Erzeugenden desselben Systems parallel ist, enthält die Meridiankurve zwei verschiedene unendlich ferne Punkte. *Die Meridiankurve ist also eine Hyperbel.* Der Mittelpunkt dieser Hyperbel fällt mit dem Mittelpunkt der Fläche zusammen.

In Fig. 201 bestimmen die Aufrißprojektionen der frontalen Erzeugenden die Asymptoten des Hauptmeridians. Die Scheitelpunkte X und Y liegen auf dem Kehlkreis. Die Fläche hat einen Asymptotenkegel, der wie gewöhnlich durch die Drehung der Asymptoten des Hauptmeridians um a bestimmt wird, und dessen Spitze deshalb im Mittelpunkt der Fläche liegt. Die Asymptotenebene ff'' schneidet das Hyperboloid in den zwei geraden Linien f und g und berührt den Asymptotenkegel längs einer geraden Linie, die zu f und g parallel ist und zwischen ihnen in der Mitte liegt.

216. Ist das Hyperboloid durch seine vertikale Achse a und

eine beliebige Erzeugende f (Fig. 203) bestimmt, so kann man sofort den Radius des Kehlkreises $a'S' (\perp f')$ bestimmen. Die Aufrißprojektion des Kehlkreises ist eine horizontale Strecke durch S'', und der Scheitelpunkt A'' des Hauptmeridians wird durch $O''A'' (= a'S')$ bestimmt.

Hat f die Grundrißspur F_1, so werden die Asymptoten X_1O'' und X_2O'' des Hauptmeridians dadurch bestimmt, daß $XX_1 = XX_2 = F_1S'$ wird. f schneidet die Hauptmeridianebene in einem Punkt F des Hauptmeridians.

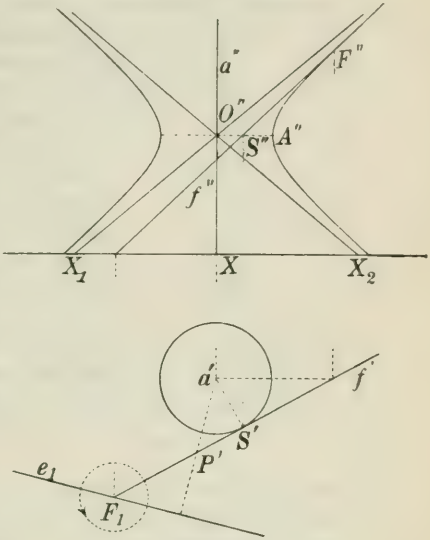


Fig. 203.

Eine beliebige Ebene durch f ist eine Tangentialebene des Hyperboloids, deren Berührungspunkt der Schnittpunkt von f mit der zu der Ebene senkrechten Meridianebene ist.

In Fig. 203 ist eine Ebene mit der Grundrißspur e_1 angenommen. Ihr Berührungspunkt P bestimmt sich sofort, indem man $a'P' \perp e_1$ zieht. Die Ebene ff'' ist die Tangentialebene im Punkt F. Die Tangente des Hauptmeridians in F wird deshalb durch f'' dargestellt. Wird $e_1 \perp f'$, so fällt der Berührungspunkt P in unendliche Entfernung. Die Ebene wird dann eine Asymptotenebene. Die Ebene ff' senkrecht zur Asymptotenebene heißt die *Zentralebene* der Erzeugenden. Ihr Berührungspunkt S liegt auf dem Kehlkreis und heißt der *Zentralpunkt* der Erzeugenden.

Wenn P sich längs f aufwärts bewegt, dreht e_1 sich nach links für einen Beobachter, der längs f mit dem Kopf nach oben liegt. Folglich: *Wenn ein Punkt sich auf einer Rechtserzeugenden bewegt, so dreht sich seine Tangentialebene nach links. Wenn ein Punkt sich auf einer Linkserzeugenden bewegt, so dreht seine Tangentialebene sich nach rechts.* Aus der Figur erkennt man, daß, wenn P die Erzeugende f mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft, e_1 sich langsamer und langsamer dreht, je mehr P sich von dem Zentralpunkt S entfernt.

Da $a'P'$ und e_1 kongruente Strahlenbüschel beschreiben, wenn P die Erzeugende f durchläuft, so erkennt man: *Die Punkt-*

reihe auf f ist projektiv zu dem Ebenenbüschel, der von den zugehörigen Tangentialebenen gebildet wird.

217. In Fig. 204 ist eine Parallelprojektion von a, f und dem kürzesten Abstand OS dieser Linien gezeichnet. a liegt in der Zeichenebene und f ist zu ihr parallel. f'' ist die senkrechte Projektion von f auf der Zeichenebene. ff'' ist die Asymptotenebene für f, und die Zentralebene ist der Zeichenebene parallel. Wir wollen nun auf f einen Punkt T suchen, dessen Tangentialebene den Winkel zwischen der Asymptoten- und der Zentralebene halbiert. Die Normale TN in diesem Punkt soll also einen Winkel von 45^0 mit der Zeichenebene bilden. $TT''N$ soll mithin ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck sein, und da $T''N \perp f''$, findet man, wenn ϱ der Radius des Kehlkreises, und α den Winkel, den die Erzeugende mit der Achse bildet, bezeichnet,

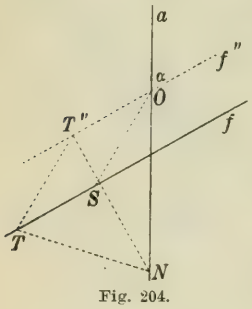


Fig. 204.

$$ST = OT'' = T''N \cdot \cot \alpha = \varrho \cot \alpha.$$

Trägt man also die Länge $\varrho \cot \alpha$ auf f vom Zentralpunkt S aus nach beiden Seiten hin ab, so gelangt man zu zwei Punkten, deren Tangentialebenen die Winkel zwischen der Asymptoten- und der Zentralebene halbieren. Die genannte Länge heißt der *Parameter* der Erzeugenden. Er ist gleich der Hälfte des Stückes, das von der Scheiteltangente des Hauptmeridians zwischen den Asymptoten liegt. Wenn man von einer Erzeugenden f den Zentralpunkt, die Zentralebene und den Parameter kennt und zugleich weiß, ob f eine Rechtserzeugende oder Linkserzeugende der Fläche ist, so ist die Tangentialebene in jedem Punkt von f vollständig bestimmt. Man kennt nämlich die Tangentialebene in drei Punkten von f (S, T und dem unendlich fernen Punkt), und da die Punktreihe der Berührungspunkte zu dem Büschel der Tangentialebenen projektiv ist, kann die Tangentialebene in einem beliebigen Punkt von f konstruiert werden.

Liegen zwei Umdrehungshyperboloide so, daß sie eine Erzeugende f gemeinsam haben und diese auf beiden Flächen zu gleich gearteten Systemen gehört, haben ferner die Hyperboloide denselben Parameter, und schneidet der kürzeste Abstand der Achsen die gemeinsame Erzeugende f unter rechtem Winkel, so haben die Flächen in jedem Punkt von f dieselbe Tangentialebene. Von den Flächen kann man dann sagen, daß sie einander längs f

berühren. Dreht man jedes der Hyperboloide um sich selbst, so berühren sie einander beständig längs einer Erzeugenden. Hierauf beruht die Konstruktion der Hyperboloidverzahnung, mit Hilfe deren eine Rotation um eine Achse in eine Rotation um eine beliebige zu der ersten windschiefe Achse umgesetzt werden kann.

218. Das Umdrehungshyperboloid wird von jeder Tangentialebene in zwei geraden Linien geschnitten. Ist die Ebene Π keine Tangentialebene, so wird ihre Schnittkurve mit der Fläche eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem eine zu Π parallele Ebene Π_1 durch den Mittelpunkt den Asymptotenkegel in 0, 1 oder 2 Seitenlinien schneidet. Der letzte Fall ist in Fig. 205 behandelt, wobei Π die Spuren e_1 und e_2 hat und e_1 zur trennenden Achse senkrecht ist. Π_1 hat die Spuren e_1' und e_2' und schneidet den Asymptotenkegel, dessen Grundrißspur k ist, in zwei Seitenlinien, deren Grundrißspuren P_1 und Q_1 sind. Die Tangentialebenen des Kegels längs dieser Seitenlinien haben die Grundrißspuren P_1P_2 und Q_1Q_2 und schneiden die Ebene Π in den Asymptoten p und q der gesuchten Hyperbel. Bestimmt man noch den Schnittpunkt P von Π und f, so hat man genügend Stücke zur Bestimmung der Hyperbel. Weitere Punkte von ihr findet man, indem man die Schnittebene Π mit einer Reihe von Parallelkreisen oder Erzeugenden schneidet.

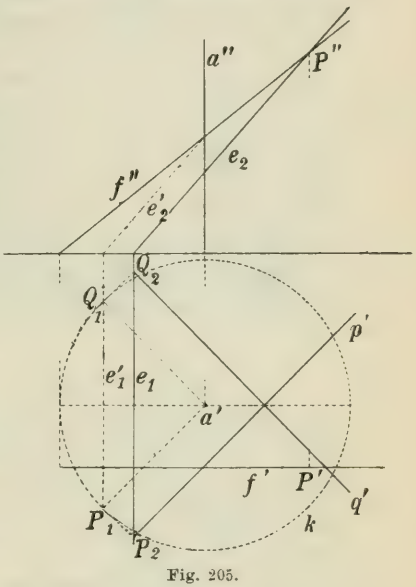


Fig. 205.

Anwendungen des Hyperboloids.

219. *Konstruktion der Schnittpunkte einer Hyperbel (mit den Asymptoten p und q und dem Scheitel A) und einer geraden Linie g, die der Hauptachse der Hyperbel parallel ist* (Fig. 206).

Wir benutzen die Zeichenebene als Aufrißebene, drehen die Hyperbel um ihre Nebenachse a und beschreiben so ein Hyperboloid; dieses enthält eine Fronterzeugende f, deren Aufrißprojektion

p ist, und deren Abstand von der Aufrißebene gleich OA wird. Das Hyperboloid wird von einer durch g senkrecht zur Zeichenebene gelegten Ebene in einem Parallelkreis k geschnitten, und dieser schneidet g in den gesuchten Punkten. k hat den Mittelpunkt C und geht durch einen Punkt P auf f. Die Umklappung k_n von k in die Zeichenebene hat also den Mittelpunkt C und geht durch P_n ($P''P_n = OA$ und $\perp g$). k_n schneidet g in den gesuchten Punkten M und N. Da die Tangentialebene in P die Erzeugende f enthält, ist $P''R \perp p$ die senkrechte Projektion der Normalen des Hyperboloids in P und RM ist mithin die Normale der gegebenen Hyperbel in M.

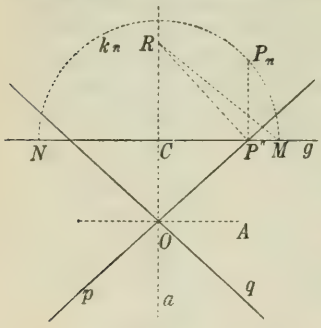


Fig. 206.

220. *Konstruktion der Schnittpunkte einer geraden Linie b mit einer Umdrehungsfläche* (Fig. 207).

Die Umdrehungsfläche habe die Achse a und den Hauptmeridian m. Wir setzen voraus, daß b weder a schneidet noch zu a senkrecht ist. Wir drehen b um a und beschreiben so ein Hyperboloid, dessen halber Hauptmeridian h sei. Die Schnittpunkte von h und m (vgl. 120) bestimmen die Parallelkreise, in denen das Hyperboloid und die Umdrehungsfläche einander schneiden. Diese Parallelkreise treffen b in den gesuchten Punkten P und Q.

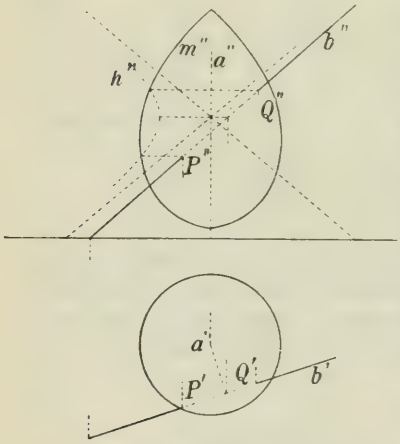


Fig. 207.

221. *Konstruktion der Tangentialebenen, die durch eine gegebene Linie b an eine Umdrehungsfläche gehen* (Fig. 208).

Wir setzen voraus, daß b weder a schneidet noch zu a senkrecht ist. Wir drehen b um a und beschreiben so ein Hyperboloid, dessen halber Hauptmeridian h sei. Da jede Ebene durch b eine Tangentialebene des Hyperboloids ist, wird die gesuchte Ebene eine gemeinsame Tangentialebene des Hyperboloids und der ge-

gebenen Umdrehungsfläche. Die Aufgabe ist dann die, an die beiden Flächen eine gemeinsame Tangentialebene zu legen, deren Berührungspunkt mit dem Hyperboloid auf b fällt. Man denkt sich die gesuchte Ebene um a gedreht, bis sie senkrecht zur Hauptmeridianebene wird. Nach der Drehung wird ihre Aufrißspur e_2' eine gemeinsame Tangente von h'' und m'', während ihre Grundrißspur e_1' zur trennenden Achse senkrecht ist. Man bestimmt deshalb zuerst eine gemeinsame Tangente der beiden Hauptmeridiane. Den Berührungspunkt P_1 auf h dreht man um a, bis er auf b in die Lage P kommt, die Tangentialebene des Hyperboloids in P ist dann eine der gesuchten Ebenen. Ihre Grundrißspur e_1 ist senkrecht auf der Meridianebene durch P. In der Figur kann man noch eine zweite gemeinsame Tangente von h und m zeichnen. Die Aufgabe hat deshalb zwei Lösungen.

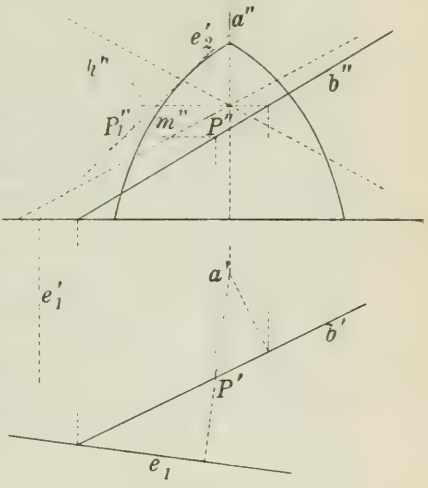


Fig. 208.

222. *Konstruktion der gemeinsamen Tangenten einer Hyperbel (mit den Asymptoten p und q und dem Scheitel A) und eines konzentrischen Kreises k* (Fig. 209).

Wir benutzen die Zeichenebene als Aufrißebene und erzeugen durch Drehung um a aus der Hyperbel ein Hyperboloid, aus dem Kreis k eine Kugel. Durch die Fronterzeugende f des Hyperboloids, deren Aufrißprojektion p wird, legen wir eine Tangentialebene Γ an die Kugel. Eine Ebene Σ durch den Mittelpunkt der Kugel senkrecht zu p schneidet die Kugel in einem größten Kreis. Ferner schneidet sie f in einem Punkt P, dessen Abstand von der Zeichenebene $P''A$ ist. Eine Tangente aus P an den größten Kreis berührt diesen in dem Punkte T, in dem

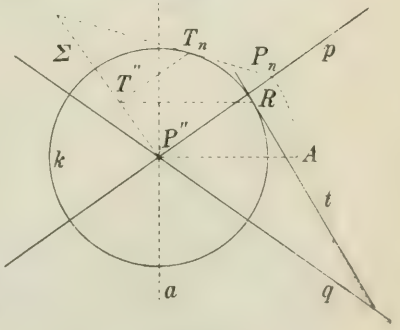


Fig. 209.

die gesuchte Tangentialebene Γ der Kugel diese berührt. Um T zu finden, klappen wir Σ in die Zeichenebene um, der genannte größte Kreis fällt dann auf k und P nach P_n ($P'P_n = P''A$). Eine Tangente aus P_n an k berühre den Kreis in T_n. T'' findet man dann daraus, daß $T_nT'' \perp \Sigma$ wird. Drehen wir die Ebene Γ um a, so bleibt sie beständig eine gemeinsame Tangentialebene der Kugel und des Hyperboloids, und wenn sie auf der Zeichenebene senkrecht wird, wird ihre Spur eine der gesuchten gemeinsamen Tangenten. Dreht man also T um a bis in die Lage R auf k, so wird R der Berührungspunkt einer der gemeinsamen Tangenten. Man hat folglich nur noch $T''R \perp a$ zu zeichnen und die Tangente an k in R zu ziehen. Der Berührungspunkt dieser Tangente mit der Hyperbel bestimmt sich nach 142. Die übrigen gemeinsamen Tangenten findet man durch Spiegelung der gefundenen Tangente an den Achsen der Hyperbel.

223. *Konstruktion der Doppelpunkttangenten des Schnittes eines Kreisringes mit einer Tangentialebene* (Fig. 210).

Kreisring nennt man die ringförmige Fläche, die durch Drehung eines Kreises m um eine in der Ebene des Kreises liegende, aber den Kreis m nicht schneidende Achse a entsteht. In Fig. 210 liegen a und m in der Aufrißebene und a ist vertikal. Die Fläche wird von dem höchsten und tiefsten Parallelkreis in einen konvexen und einen unkonvexen Teil zerlegt. Die Tangentialebene in einem Punkt P des unkonvexen Teils habe die Aufrißspur e_2; sie schneidet die Fläche in einer Kurve, von der zwei Zweige durch P gehen, die also in P einen Doppelpunkt hat. Die Aufgabe ist nun, die Tangenten der Schnittkurve in diesem Doppelpunkt zu konstruieren. P_1 sei ein Punkt von m in der Nachbarschaft von P. Der Parallelkreis k_1 durch P_1 treffe die Schnittebene in zwei Punkten M und N, deren Verbindungslinien PM und PN mit P in die gesuchten Tangenten übergehen, wenn k_1 sich k nähert. Aber vorläufig sind diese Verbindungslinien Erzeugende eines Umdrehungshyperboloids, dessen Achse a ist und

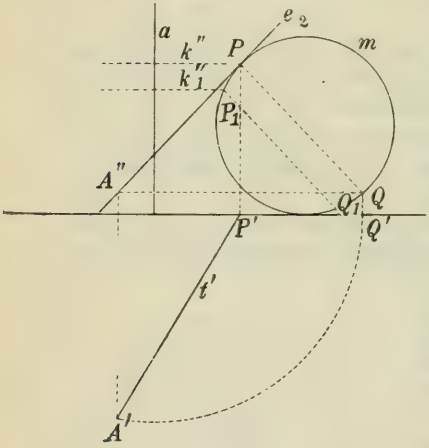


Fig. 210.

dessen Hauptmeridian h den Kreis m in P berührt und durch P_1 geht. h schneidet m in einem neuen Punkt Q_1, der so liegt, daß P_1Q_1 parallel zu der zu e_2 bezüglich einer vertikalen Linie symmetrischen Linie PQ wird (153). Das Hyperboloid enthält also den durch Q_1 gehenden Parallelkreis, und die Linien PM und PN müssen deshalb diesen Kreis schneiden. Wenn nun k_1 sich k nähert, nähert Q_1 sich Q, und die Grenzlagen von PM und PN müssen auch den Parallelkreis schneiden, der durch Q geht. *Die gesuchten Tangenten sind also die Verbindungslinien von P mit den Punkten A und B, in denen die gegebene Schnittebene den durch Q gehenden Parallelkreis trifft.* (In der Figur ist nur die eine Tangente PA gezeichnet.)

Wenn k_1 sich k nähert, konvergiert das genannte Hyperboloid nach einer solchen Grenzlage, daß sein Hauptmeridian im Punkte P den Krümmungskreis m bekommt. Diese Grenzlage heißt das *Schmiegungshyperboloid* des Kreisringes in k. Eine beliebige Ebene, die durch P geht und nicht mit der Tangentialebene in P zusammenfällt, schneidet den Kreisring und das Hyperboloid in Kurven, die in P einen gemeinsamen Krümmungskreis besitzen. Wenn P auf dem kleinsten Parallelkreis des Kreisringes liegt, kann die angegebene Konstruktion nicht unmittelbar angewendet werden. Aber in diesem Falle findet man leicht die Asymptoten für den Hauptmeridian des Schmiegungshyperboloids durch die in Fig. 144 angegebene Konstruktion. Diese Asymptoten bestimmen dann die Richtung der gesuchten Tangenten.

Umdrehungskegelschnittflächen.

224. *Jeder Kegelschnitt k erzeugt durch Drehung um eine seiner Achsen a eine Fläche, die von jeder schneidenden Ebene in einem Kegelschnitt (oder in zwei geraden Linien) geschnitten wird. Diese Fläche heißt eine Umdrehungskegelschnittfläche.*

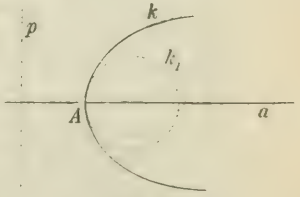


Fig. 211.

Wenn a den Kegelschnitt k nicht schneidet, so ist k eine Hyperbel und a deren zweite Achse. Die erzeugte Fläche wird dann ein einschaliges Hyperboloid, das wir bereits im Vorstehenden genügend behandelt haben. Wir setzen also nun voraus, daß a den Kegelschnitt k in zwei Punkten A und B schneidet, von denen der eine (B) unendlich fern sein kann. Ein Kreis k_1, der k in A berührt (Fig. 211), entspricht k in einer ebenen perspektivischen Kollineation mit dem Zentrum A und der Kollineations-

achse p ($\perp a$). Bei der Drehung um a beschreibt k eine Fläche Λ und k_1 eine Kugel Λ_1. Λ und Λ_1 entsprechen einander in einer räumlichen perspektivischen Kollineation, in der die genannte ebene Kollineation enthalten ist. Die Kollineationsebene ist die Ebene Π, die bei der Drehung von p beschrieben wird, und das Kollineationszentrum ist A. Ein beliebiger ebener Schnitt von Λ entspricht einem ebenen Schnitt von Λ_1 und muß deshalb ein Kegelschnitt sein. Da eine Tangentialebene von Λ einer Tangentialebene von Λ_1 entspricht, ist Λ in allen Punkten konvex. Da die Kugel Λ_1 keine geraden Linien enthält, kann auch Λ keine geraden Linien enthalten.

Außer dem einschaligen Umdrehungshyperboloid finden wir folgende Umdrehungskegelschnittflächen:

1. Das *Umdrehungsellipsoid* oder *Sphäroid,* das durch Drehung einer Ellipse um eine ihrer Achsen entsteht. Das Sphäroid ist ein *verlängertes* oder *abgeplattetes,* je nachdem die Drehung um die große oder kleine Achse der Ellipse stattfindet. Das verlängerte Sphäroid ist der geometrische Ort für alle Punkte im Raum, deren Abstand von zwei festen Punkten, den *Brennpunkten,* eine gegebene Summe hat.

2. Das *Umdrehungsparaboloid*, das durch Drehung einer Parabel um ihre Achse entsteht. Dieses enthält einen unendlich fernen Punkt (in der Richtung der Achse), und die Tangentialebene in diesem Punkt ist unendlich fern. Die Fläche ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von einem festen Punkte (dem *Brennpunkte*) und einer festen Ebene (der *Leitebene*) gleich groß sind.

3. Das *zweischalige Umdrehungshyperboloid.* Dieses wird erzeugt durch die Drehung einer Hyperbel um ihre Hauptachse und ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstand von zwei festen Punkten, den *Brennpunkten,* eine gegebene Differenz hat. Die Asymptoten der Hyperbel beschreiben bei der Drehung einen Rotationskegel (den Asymptotenkegel), der die Fläche längs einem unendlich fernen Kegelschnitt berührt. Die unendlich fernen Punkte der Fläche liegen in den Richtungen, die durch die Seitenlinien des Asymptotenkegels bestimmt werden. Der Asymptotenkegel wird ebenso wie beim einschaligen Umdrehungshyperboloid benutzt, um zu erkennen, ob eine gegebene Ebene die Fläche in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel schneidet.

225. Die im Vorstehenden angegebenen Konstruktionsmethoden für allgemeine Umdrehungsflächen können natürlich auch auf die Umdrehungskegelschnittflächen angewendet werden. Aber

in manchen Fällen kann man leichtere Methoden finden und in allen Fällen muß man beachten, daß die Konstruktionen in der Hauptmeridianebene so weit wie möglich auszuführen sind, ohne den Hauptmeridian selbst zu zeichnen.

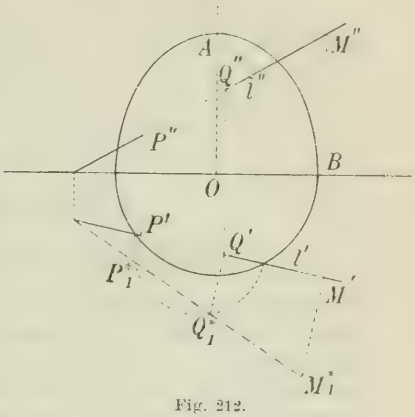


Fig. 212.

1. Beispiel. Die Schnittpunkte eines Umdrehungsellipsoids und einer geraden Linie l zu finden (Fig. 212). Der Hauptmeridian des Ellipsoids habe die Halbachsen OA und OB (OA ist vertikal und OB fällt in die trennende Achse), OA sei die Achse der Umdrehungsfläche. Durch eine leicht zu bestimmende perspektivische Affinität mit der Grundrißebene als Affinitätsebene geht das Ellipsoid in eine Kugel mit dem Radius OB über. l geht dabei in eine Linie l^* über, die dieselbe Grundrißspur wie l hat und durch den M entsprechenden Punkt M^* hindurchgeht. (M ist in derselben Höhe wie A angenommen, M^* liegt dann in der Höhe OB über der Grundrißebene.) Die Grundrißprojektionen P' und Q' der Schnittpunkte von l^* mit der Kugel findet man nun durch Umklappung einer vertikalen Ebene durch l^* ($M'M_1^* = OB$). P' und Q' sind zugleich die Grundrißprojektionen der gesuchten Punkte.

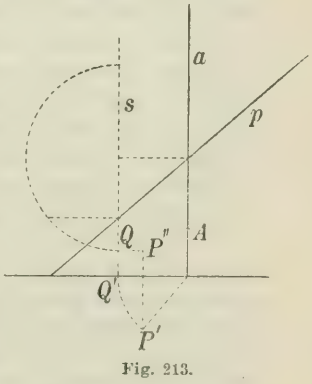


Fig. 213.

2. Beispiel. Es ist ein zweischaliges Umdrehungshyperboloid gegeben, dessen Achse a vertikal ist und in der Aufrißebene liegt. Der eine Scheitelpunkt sei A und die eine Asymptote des Hauptmeridians p. Man soll die Aufrißprojektion eines Punktes P der Fläche finden, wenn die Grundrißprojektion P' gegeben ist (Fig. 213). Man dreht die vertikale Linie durch den Punkt P in die Hauptmeridianebene hinein, wobei sie die Lage s erlangt. Darauf bestimmt man nach 219 den Schnittpunkt Q dieser Linie mit dem Hauptmeridian und dreht dann Q zurück. Die Aufgabe hat zwei Lösungen.

Neuntes Kapitel.

Kegelschnittflächen.

Die Tangentialebene und ihre Lage zur Fläche.

226. *Eine Kegelschnittfläche ist eine Fläche, die von jeder Ebene, wenn diese mehr als einen Punkt der Fläche enthält, in einem Kegelschnitte oder in zwei geraden Linien oder auch in zwei zusammenfallenden Linien geschnitten wird.*[1]) Wenn die Ebene die Fläche in zwei (verschiedenen oder zusammenfallenden) geraden Linien schneidet, so sagt man, die Schnittkurve sei ein *uneigentlicher Kegelschnitt.*

Im Vorstehenden haben wir bereits mehrere Beispiele für Kegelschnittflächen (Kreiskegel, Kreiszylinder und Umdrehungskegelschnittflächen) kennen gelernt. Wir wollen nun untersuchen, welche verschiedenen Formen von solchen Flächen überhaupt existieren. Zunächst müssen wir sicherstellen, daß die Fläche in jedem ihrer Punkte eine Tangentialebene hat. Dazu wird die Forderung hinreichen, daß die an der betreffenden Stelle berührenden Tangenten aller Kegelschnitte auf der Fläche, die durch den Punkt hindurchgehen, in einer Ebene enthalten sind.

227. Zuerst betrachten wir eine willkürliche Kegelschnittfläche K, die keine gerade Linie enthält. Die Fläche wird

1) Die folgenden Untersuchungen zeigen, daß die Kegelschnittflächen dieselben Typen umfassen wie die aus der analytischen Geometrie bekannten reellen Flächen zweiten Grades. Es ist in der Tat klar, daß jede (nicht zerfallende) reelle Fläche, die in rechtwinkligen Koordinaten durch eine Gleichung zweiten Grades dargestellt werden kann, eine Kegelschnittfläche sein muß, weil jeder ebene Schnitt der Fläche durch eine Gleichung zweiten Grades dargestellt werden kann. Die Theorie der reellen Flächen zweiten Grades ist somit in der Theorie der Kegelschnittflächen enthalten. Daß aber auch jede Kegelschnittfläche eine Fläche zweiten Grades sein muß, geht ebenfalls aus den hier folgenden Untersuchungen hervor.

dann von jeder Ebene, die mehr als einen ihrer Punkte enthält, in einem eigentlichen Kegelschnitt getroffen. Hieraus folgt, daß keine gerade Linie mehr als zwei Punkte mit der Fläche gemein hat. Eine Tangente t an einen beliebigen Kegelschnitt auf K hat nur einen Punkt mit K gemeinsam und berührt deshalb jeden Schnitt der Fläche mit einer Ebene durch t. Legt man durch einen beliebigen Punkt P auf K zwei Ebenen und schneiden diese K in zwei Kegelschnitten, die in P verschiedene Tangenten t und t_1 besitzen, so wird die Ebene tt_1 die Tangentialebene in dem Punkte P. Denn die Ebene tt_1 kann nur den einen Punkt mit der Fläche gemein haben. Würde sie nämlich die Fläche in einem Kegelschnitte schneiden, so müßte dieser Kegelschnitt t und t_1 in P berühren, was unmöglich ist. Die Ebene hat deshalb auch nur einen Punkt mit einem beliebigen Kegelschnitt der Fläche, der durch P geht, gemein und enthält mithin die Tangente des Kegelschnittes in P. Folglich: *Eine Kegelschnittfläche, die keine gerade Linie enthält, hat in jedem ihrer Punkte eine bestimmte Tangentialebene. Die Fläche ist in jedem Punkte konvex.* Da die Tangentialebene nur einen Punkt mit der Fläche gemein hat, können zwei verschiedene Punkte nicht dieselbe Tangentialebene haben.

228. Wir betrachten jetzt eine Kegelschnittfläche K, die mindestens eine gerade Linie f enthält und beweisen zuerst, daß eine solche Fläche unendlich viele gerade Linien enthält.

Jede Ebene, die durch f und einen Punkt A auf der Fläche gelegt wird, schneidet nämlich K in einer neuen geraden Linie, die durch A geht. Durch jeden Punkt von K geht also mindestens eine gerade Linie, die auf der Fläche liegt. Nehmen wir nun an, daß durch einen Punkt P auf f nur diese eine Linie f auf der Fläche gezogen werden kann, so muß eine beliebige Ebene, die durch P und noch einen Punkt der Fläche geht und f nicht enthält, die Fläche in einem eigentlichen Kegelschnitt k schneiden. Die Ebene ft, die durch f und die Kegelschnittangente t in P bestimmt wird, kann dann nur die Linie f mit der Fläche gemein haben. Jede gerade Linie auf der Fläche muß nämlich k in dem Punkte schneiden, in dem sie die Ebene des Kegelschnittes trifft. Eine Ebene, die durch f und einen beliebigen Punkt Q auf k gelegt wird, schneidet die Fläche in einer neuen geraden Linie g, die durch Q geht und f in einem von P verschiedenen Punkt T schneidet. Man erkennt nun, daß durch T kein eigentlicher Kegelschnitt auf der Fläche gelegt werden kann, weil ein solcher Kegelschnitt eine Tangente im Punkte T hätte, die sowohl in der Ebene ft wie in der Ebene fg liegen müßte, was unmöglich ist. Jede Ebene durch

T schneidet also die Fläche in einer oder zwei geraden Linien, wenn sie mit der Fläche andere Punkte als T gemein hat. Die Fläche ist also ein Kegel mit der Spitze T. Folglich: *Wenn auf einer Kegelschnittfläche ein Punkt existiert, durch welchen eine und nur eine gerade Linie geht, die in der Fläche enthalten ist, so muß die Fläche ein Kegel sein.*

Weiter wollen wir beweisen, daß *eine Kegelschnittfläche* K, *die drei durch denselben Punkt P gehende gerade Linien f, g und h enthält, notwendigerweise ein Kegel sein muß.*

Eine beliebige Ebene, die nicht durch P geht, schneidet die Fläche in einem Kegelschnitt. Schnitte sie sie nämlich in einer geraden Linie, so müßten f, g und h in derselben Ebene liegen, was unmöglich ist, und schnitte sie sie in zwei geraden Linien, so müßte eine der Ebenen fg, gh und hf die Fläche K in drei geraden Linien schneiden, was ebenfalls unmöglich ist. Alle geraden Linien der Fläche gehen also durch P, d. h. die Fläche ist ein Kegel mit der Spitze P.

Eine Kegelfläche hat eine bestimmte Tangentialebene in jedem Punkte, ausgenommen die Spitze.

Aus den gefundenen Sätzen folgt nun: *Auf jeder Kegelschnittfläche, die gerade Linien enthält, aber kein Kegel ist, gehen durch jeden Punkt zwei und nur zwei gerade Linien. Die zwei geraden Linien, die durch einen beliebigen Punkt P der Fläche gehen, bestimmen eine Ebene, welche die Tangentialebene in P ist.* Denn jeder eigentliche Kegelschnitt, der auf der Fläche liegt und durch P geht, hat nur diesen einen Punkt mit der Ebene gemein, und seine Tangente in P liegt also in der Ebene.

Die Fläche ist unkonvex in jedem ihrer Punkte.

Zwei verschiedene Punkte der Fläche können nicht dieselbe Tangentialebene haben, denn eine solche Ebene müßte die Fläche in mindestens drei geraden Linien schneiden.

Da eine Linie l, die nicht auf der Fläche liegt, höchstens zwei Punkte mit ihr gemein hat, und da durch jeden von diesen Punkten zwei gerade Linien der Fläche gehen, kann man durch l höchstens zwei Ebenen legen, welche die Fläche in geraden Linien schneiden. Hieraus folgt: *Durch eine gerade Linie l, die nicht auf der Fläche liegt, kann man immer unendlich viele Ebenen legen, welche die Fläche in eigentlichen Kegelschnitten schneiden.*

Pol und Polarebene.

229. *Unter der Polarebene eines Punktes P (des Pols) in bezug auf eine Kegelschnittfläche* K *versteht man eine Ebene, welche*

die Polaren von P bezüglich aller eigentlichen Kegelschnitte der Fläche, deren Ebenen durch P gehen, enthält.

Wir wollen beweisen, daß eine solche Ebene existiert, indem wir vorläufig voraussetzen, daß K keine Kegelfläche ist. Liegt zunächst P auf der Fläche, so sieht man sofort, daß die Polarebene existiert, indem die in P berührende Tangentialebene die Bedingung erfüllt. Nehmen wir aber an, daß P nicht auf der Fläche liegt, so kommt es darauf an zu zeigen, daß alle Punkte P_1, die mit P bezüglich der Schnittpunkte der Fläche mit einer willkürlichen Linie durch P harmonisch verbunden sind, in einer und derselben Ebene liegen. Eine Linie l_1 durch P treffe die Fläche in zwei verschiedenen Punkten C_1 und D_1 (Fig. 214), deren Tangentialebenen Γ_1 und Δ_1 einander in der Linie s schneiden mögen. P_1 sei mit P bezüglich C_1 und D_1 harmonisch verbunden. Ferner schneide eine beliebige andere Linie l_2 durch P die Fläche K in C_2 und D_2, und P_2 sei mit P bezüglich C_2 und D_2 harmonisch verbunden. Wir setzen einstweilen voraus, daß die Ebene $l_1 l_2$ die Fläche in einem eigentlichen Kegelschnitt schneidet. Dieser muß dann durch C_1, D_1, C_2 und D_2 gehen, und seine Tangenten c_1 und d_1 in den beiden erstgenannten Punkten liegen in den Ebenen Γ_1 und Δ_1 und schneiden einander in dem Punkte S auf s. Die Polare von P bezüglich dieses Kegelschnitts geht durch die Punkte P_1, P_2 und S, die Linie $P_1 P_2$ muß also s schneiden. Läßt man nun l_2 variieren, während l_1 fest bleibt, so muß die Linie $P_1 P_2$ eine Ebene beschreiben, die durch P_1 und s bestimmt ist. Gelangt l_2 in eine solche Lage, daß die Ebene $l_1 l_2$ die Fläche in zwei geraden Linien trifft, so müssen diese einander auf s schneiden; $P_1 P_2$ geht dann durch ihren Schnittpunkt und liegt mithin beständig in der Ebene $P_1 s$. Hiermit ist vollständig bewiesen, daß P eine Polarebene hat, nämlich die durch s und P_1 bestimmte Ebene.

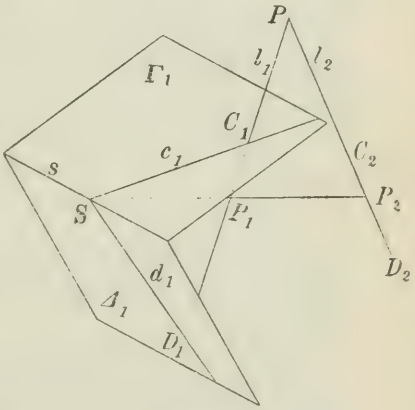


Fig. 214.

Hat der Punkt P die Polarebene Π, und schneidet eine beliebige Ebene durch P die Ebene Π in einer geraden Linie p und die Fläche in einem eigentlichen Kegelschnitt k, so ist p die Polare

von P bezüglich k. So erkennt man, daß ein Punkt, der in seiner Polarebene liegt, auf der Fläche enthalten sein muß. Die Polarebene ist dann die Tangentialebene des Punktes.

Liegt P nicht auf der Fläche, und schneidet seine Polarebene die Fläche, so wird die Schnittkurve ein Kegelschnitt, der die Berührungspunkte aller Tangenten, die durch P gehen, enthält und damit die Berührungskurve eines der Fläche umschriebenen Kegels mit der Spitze P. *Jeder umschriebene Kegel berührt also die Fläche längs eines Kegelschnittes.* Legen wir durch zwei Punkte P, P', die nicht auf der Fläche liegen, eine Ebene, welche die Fläche in einem eigentlichen Kegelschnitt k schneidet (was nach 228 immer dann möglich ist, wenn die Fläche kein Kegel ist), so schneidet diese Ebene die Polarebenen der beiden Punkte in den Polaren von P und P' bezüglich k. Mit Hilfe der früher bewiesenen Sätze über Kegelschnitte beweist man dann leicht die folgenden Tatsachen:

1. *Wenn ein Punkt P in der Polarebene Π' eines anderen Punktes P' liegt, so liegt P' auch in der Polarebene Π von P.* Die beiden Punkte P und P' heißen dann *konjugiert.*

2. *Die konjugierten Punktepaare auf einer geraden Linie, welche die Fläche nicht berührt und nicht auf ihr liegt, bilden eine Involution; wenn die Linie die Fläche schneidet, sind die Schnittpunkte Doppelpunkte der Involution.*

3. *Zwei verschiedene Punkte können nicht dieselbe Polarebene haben.*

4. *Zu jeder Ebene Π gehört ein bestimmter Pol.*

Nimmt man nämlich in der Ebene drei Punkte A, B, C an, welche nicht auf derselben Geraden liegen, so wird der Punkt P, der in den drei Polarebenen von A, B, C enthalten ist, der gesuchte Pol sein.

5. *Die Polarebenen der Punkte einer geraden Linie gehen wieder durch eine gerade Linie hindurch und die Polarebenen der Punkte dieser Linie gehen durch die erste Linie.* Der Satz folgt unmittelbar aus 1. und 4. Zwei miteinander so verbundene gerade Linien heißen *reziproke Polaren* voneinander.

230. Ist die Fläche K ein Kegel, so können die vorstehenden Sätze nicht alle aufrechterhalten werden. Ein beliebiger Punkt P, der nicht in die Spitze S des Kegels fällt, hat indessen immer eine bestimmte Polarebene, denn da die ganze Fläche durch Projektion eines Kegelschnittes, dessen Ebene durch P geht, aus der Spitze S entstehen kann, muß man die Polarebene von P finden können, indem man die Polare von P bezüglich des Kegel-

schnittes aus der Spitze des Kegels projiziert. Man erkennt so aber auch, daß alle Punkte, die auf einem Strahl durch die Spitze liegen, (die Spitze selbst ausgenommen) dieselbe Polarebene besitzen. Im folgenden wollen wir die Kegelflächen außer Betracht lassen, wenn das Gegenteil nicht ausdrücklich hervorgehoben wird.

231. Wenn zwei parallele Ebenen eine Kegelschnittfläche in eigentlichen Kegelschnitten treffen, so können drei Fälle eintreten:

1. Die unendlich ferne Schnittlinie l der Ebene hat keinen Punkt mit der Fläche gemein. Die Schnittkurven sind in diesem Falle Ellipsen, und da diese Ellipsen auf der gemeinsamen unendlich fernen Geraden ihrer Ebene dieselbe Involution konjugierter Punkte bestimmen, so sind sie ähnlich und in ähnlicher Lage (137).

2. l berühre die Fläche. Dann sind die Kegelschnitte Parabeln, und da sie parallele Durchmesser haben und in parallelen Ebenen liegen, sind sie ebenfalls ähnlich und in ähnlicher Lage.

3. l schneide endlich die Fläche in zwei verschiedenen Punkten A und B. Die Schnittpunkte sind in diesem Falle Hyperbeln, und da diese durch dieselben unendlich fernen Punkte A und B hindurchgehen, haben sie parallele Asymptoten. Aber da die Asymptotenwinkel, die die Hyperbeln enthalten, nicht notwendig dieselben zu sein brauchen, brauchen die Hyperbeln nicht ähnlich zu sein (im elementargeometrischen Sinne des Wortes).

232. Aus der Lehre von Pol und Polarebene geht hervor, daß im Raume eine ebensolche Dualität existiert, wie wir sie früher für die Ebene entwickelt haben. Hat man eine bestimmte Kegelschnittfläche, z. B. eine Kugel, vor sich, so entspricht jedem Punkt als Pol eine bestimmte Ebene als Polarebene und umgekehrt. Den Punkten einer geraden Linie entsprechen die Ebenen durch eine gerade Linie. Man kann deshalb ein *Dualitätsprinzip* aufstellen, das darauf hinausläuft, daß man aus jedem Satz, der projektive Eigenschaften betrifft, einen neuen ableiten kann, indem man die Worte „Punkt“ und „Ebene“, „gerade Linie durch einen Punkt“ und „gerade Linie in einer Ebene“ vertauscht.

Mittelpunktsflächen.

233. Wenn der Pol der unendlich fernen Ebene ein eigentlicher Punkt O ist, wird dieser ein *Mittelpunkt* (Symmetriepunkt) der Fläche. Die Polarebene eines unendlich fernen Punktes U, der nicht auf der Fläche liegt, halbiert alle Sehnen von der Richtung U

und heißt eine *Durchmesserebene*. Alle Durchmesserebenen gehen durch den Mittelpunkt.

Die reziproke Polare einer unendlich fernen Linie u, welche die Fläche nicht berührt und nicht auf ihr liegt, enthält die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, in denen die Fläche von den Ebenen durch u geschnitten wird, und heißt ein *Durchmesser*. Alle Durchmesser gehen durch den Mittelpunkt.

Ein Durchmesser und eine Durchmesserebene heißen *konjugiert*, wenn der Durchmesser dieselbe Richtung hat wie das zu der Durchmesserebene gehörende Sehnensystem. Der Durchmesser enthält die Mittelpunkte aller Kegelschnitte der Fläche, deren Ebenen der Durchmesserebene parallel sind.

Drei Durchmesser heißen konjugiert, wenn jeder von ihnen der Ebene der beiden anderen konjugiert ist.

234. Da wir die Fläche als stetig voraussetzen, und sie sonach jeden Punkt enthält, dem sie beliebig nahe kommt, muß der Abstand des Zentrums O von den Punkten der Fläche einen bestimmten erreichbaren Minimalwert haben. Es sei A ein Punkt der Fläche, dessen Abstand von O diesen Minimalwert annimmt. Die Gerade OA ist dann Symmetrieachse eines jeden Kegelschnittes, in welchem die Fläche von einer durch OA gehenden Ebene geschnitten wird.

Die durch O zu OA senkrecht gelegte Ebene E ist somit eine Symmetrieebene der Fläche, und die zu E parallelen Ebenen schneiden auf der Fläche Kegelschnitte aus, deren Mittelpunkte auf OA liegen. Wenn diese Kegelschnitte Kreise sind, ist die Fläche eine Umdrehungsfläche mit der Achse OA; sind sie nicht Kreise, so haben sie gemeinsame Achsenrichtungen (231) und werden von den beiden durch OA gehenden Ebenen, welche ihre Achsen enthalten, symmetrisch geteilt. Die letztgenannten Ebenen sind daher auch Symmetrieebenen der Fläche. Also:

Jede Mittelpunktsfläche hat wenigstens drei Symmetrieebenen (Hauptebenen), die paarweise zueinander senkrecht sind. Ihre Schnittlinien heißen die *Achsen* der Fläche. Sie bilden ein System von drei konjugierten Durchmessern, die paarweise zueinander senkrecht sind.

235. Wir wollen im folgenden drei zueinander senkrechte Achsen x, y und z voraussetzen und können dann folgende typische Formen von Mittelpunktsflächen aufstellen.

1. *Das Ellipsoid* (Fig. 215). Alle drei Achsen schneiden die Flächen. Die Schnittpunkte heißen *Scheitelpunkte* der Fläche. Diese Scheitelpunkte sind die Scheitel der Ellipsen, in welchen

die je zwei Achsen der Fläche verbindenden Hauptebenen die Fläche schneiden. Diese drei Ellipsen heißen die *Hauptschnitte* der Fläche. Die Ebenen, welche zu einer Hauptebene parallel sind, schneiden die Fläche in ähnlichen Ellipsen, deren Scheitelpunkte auf den zu den anderen Hauptebenen gehörenden Hauptschnitten liegen. Die Fläche ist durch ihre Achsen vollständig bestimmt. Die Längen der drei Achsen können anderseits beliebig gewählt werden (vgl. 245).

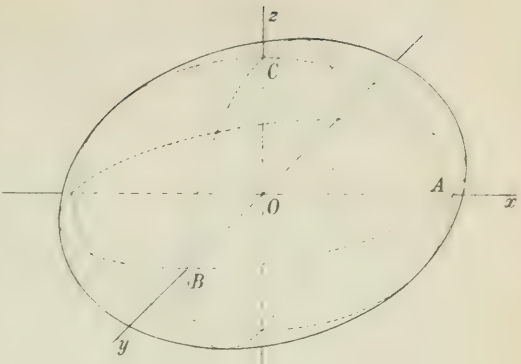


Fig. 215.

2. *Das einschalige Hyperboloid.* Nur zwei der Achsen, etwa x und y, schneiden die Fläche (Fig. 216). Der Schnitt der xy-Ebene wird eine Ellipse, während die anderen Hauptschnitte Hyperbeln sind. Die Fläche kann ebenso wie das Ellipsoid durch eine senkrechte perspektivische Affinität aus einer Umdrehungsfläche erzeugt werden, indem man eine Meridianebene der Umdrehungsfläche zur Affinitätsebene wählt. Die geraden Linien des Umdrehungshyperboloids entsprechen in dieser Affinität geraden Linien des allgemeinen Hyperboloids, auch die Asymptotenkegel entsprechen einander. Auf diese Weise kann man die wesentlichsten Eigenschaften der Fläche leicht ableiten.

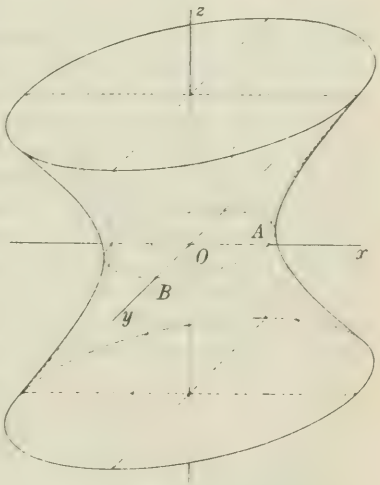


Fig. 216.

3. *Das zweischalige Hyperboloid* (Fig. 217). Nur eine der Achsen, etwa x, schneidet die Fläche. Die Schnitte in der xy-Ebene und xz-Ebene werden Hyperbeln mit derselben Hauptachse.

Die yz-Ebene schneidet die Fläche nicht, aber die zur yz-Ebene parallelen Ebenen, deren Abstand von dieser größer als die reelle Halbachse der Fläche ist, schneiden sie in ähnlichen Ellipsen. Die Fläche kann wieder durch eine senkrechte perspektivische

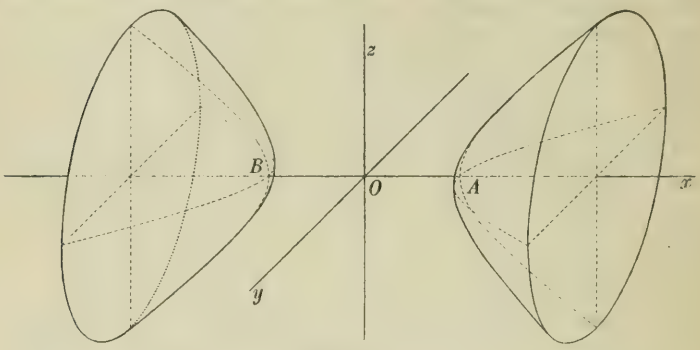


Fig. 217.

Affinität, für welche etwa die xz-Ebene als Affinitätsebene gewählt wird, aus einer Umdrehungsfläche erzeugt werden. Sie besitzt einen Asymptotenkegel, der längs des unendlich fernen Kegelschnittes berührt und enthält keine geraden Linien.

Bei den vorstehenden Untersuchungen haben wir die Kegelflächen ausgeschlossen. Es ist aber leicht zu zeigen, daß auch jede Kegelfläche $O(k)$, deren Scheitel ein eigentlicher Punkt O und deren Leitkurve ein beliebiger Kegelschnitt k ist, drei Symmetrieebenen besitzt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man k als Ellipse annehmen; auf dieser Ellipse gibt es dann zwei Punkte A und B derart, daß der Winkel AOB ein Maximum wird; es zeigt sich, daß die Ebene AOB eine Symmetrieebene der Kegelfläche ist, und man findet sonach leicht die beiden anderen.[1])

Die Paraboloide.

236. Wenn der Pol der unendlich fernen Ebene ein unendlich ferner Punkt U ist, besitzt die Kegelschnittfläche kein Zentrum, sondern berührt die unendlich ferne Ebene im Punkt U. Sie heißt in diesem Falle ein *Paraboloid*. Die Polarebene eines un-

1) Über die Konstruktion der Symmetrieebenen vgl. man Rohn-Papperitz, *Lehrbuch d. darst. Geometrie,* 3. Aufl., III, Leipzig 1906, S. 164 ff.

endlich fernen Punktes V, der nicht auf der Fläche liegt, halbiert alle Sehnen von der Richtung V und heißt eine *Durchmesserebene*. Alle Durchmesserebenen gehen durch U, d. h. sind der Richtung U parallel, und schneiden die Fläche in Parabeln mit der Durchmesserrichtung U. Jeder umschriebene Zylinder berührt die Fläche längs einer solchen Parabel.

Zwei parallele Durchmesserebenen schneiden die Fläche in kongruenten Parabeln. Eine Ebene, welche den zwei Durchmesserebenen parallel ist und in der Mitte zwischen ihnen liegt, ist nämlich selbst eine Durchmesserebene und wird somit eine Symmetrieebene (mit schiefer oder gerader Symmetrie) für die beiden Schnitte.

Die reziproke Polare einer unendlich fernen Geraden u (welche die Fläche nicht berührt oder auf ihr liegt) heißt ein *Durchmesser*. Sie enthält die Mittelpunkte der Schnittkurven aller durch u gehenden parallelen Ebenen. Alle Durchmesser gehen durch den Berührungspunkt U der Fläche mit der unendlich fernen Ebene.

Um die Gestalt der Fläche näher zu bestimmen, betrachten wir einen eigentlichen Kegelschnitt k, der durch den Schnitt der Fläche mit einer Ebene senkrecht zur Richtung U entsteht (Fig. 218). k muß entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel sein, da jede Parabel auf der Fläche durch U geht. x und y mögen die Achsen von k sein. Die unendlich fernen Punkte von x und y haben dann die Polarebenen yU und xU. Da jede dieser Ebenen auf dem System paralleler Sehnen, die sie halbiert, senkrecht steht, wird sie eine Symmetrieebene der Fläche, und wir finden: *Jedes Paraboloid hat zwei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen.*

Die Schnittlinie z dieser Ebenen heißt die *Achse* der Fläche. z geht durch U und schneidet die Fläche in einem eigentlichen Punkt A, dem *Scheitel*. Die Symmetrieebenen schneiden die Fläche in zwei Parabeln a und b, den *Hauptschnitten* des Paraboloids, die einen gemeinsamen Scheitel A und eine gemeinsame Achse z besitzen. Die beiden Hauptschnitte bestimmen die ganze Fläche. Da nämlich parallele Durchmesserebenen kongruente Schnitte liefern, kann die Fläche dadurch erzeugt werden, daß die unveränderliche Parabel b mit ihrem Scheitel auf a gleitet, während ihre Achse und ihre Ebene dieselbe Richtung beibehalten.

237. Es gibt zwei Arten von Paraboloiden:

1. *Das elliptische Paraboloid.* a und b sind beim Scheitel nach derselben Seite hin konkav (Fig. 218). Die Schnitte senkrecht zur Achse werden ähnliche Ellipsen, insbesondere können diese Schnitte Kreise sein, und die Fläche ist dann ein Umdrehungs-

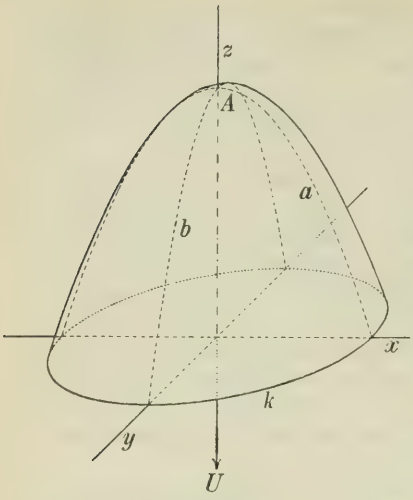


Fig. 218.

paraboloid. Im anderen Falle kann man sie durch eine perspektivische Affinität mit der xz-Ebene als Affinitätsebene aus einem Umdrehungsparaboloid erzeugen. Das elliptische Paraboloid enthält keine geraden Linien.

2. *Das hyperbolische Paraboloid.* a und b sind beim Scheitel nach entgegengesetzten Seiten hin konkav (Fig. 219). Die Fläche muß dann unkonvex sein. Durch eine Raumperspektive, deren Zentrum der Scheitelpunkt A ist, und in welchem b einem Kreis b_1 entpricht, während die Fluchtebene $\mathbf{U}_1$ den Kreis b_1 berührt und senkrecht zur Achse der Fläche ist, geht das Paraboloid aus einem einschaligen Umdrehungshyperboloid hervor. Hierdurch läßt sich zunächst die Existenz der Fläche beweisen, außerdem leiten wir so folgende Eigenschaften her: Das hyperbolische Paraboloid enthält zwei Systeme von geraden Linien *(Regelstrahlen)*. Jeder Regelstrahl des einen Systems schneidet jeden Regelstrahl des anderen Systems. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Regelstrahlen, von jedem System einer. Diese beiden Regelstrahlen bestimmen jedesmal die Tangentialebene in dem Punkte. Jede Ebene durch einen Regelstrahl des einen Systems schneidet die Fläche in einem Regelstrahl des anderen Systems.

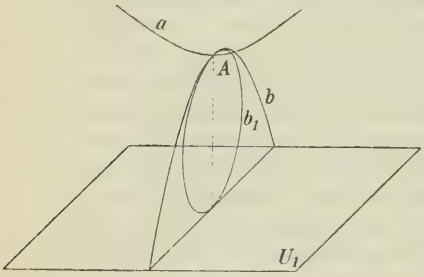


Fig. 219.

238. Werden die durch den Scheitelpunkt A gehenden Regelstrahlen mit f und g bezeichnet (Fig. 222), und ist z die Achse der Fläche, so schneiden die Ebenen fz und gz die Fläche in zwei unendlich fernen Regelstrahlen g_1 und f_1. Da alle Regelstrahlen des Systems, zu dem f gehört, g_1 schneiden müssen, werden sie parallel zu der Ebene fz. Ebenso werden alle Regelstrahlen des

Systems g parallel zu der Ebene gz. Die Ebenen fz und gz oder zwei andere zu ihnen parallele Ebenen heißen deshalb *Richtungsebenen*.

Da das hyperbolische Paraboloid zwei unendlich ferne gerade Linien enthält, muß ein ebener Schnitt der Fläche wenigstens einen unendlichen fernen Punkt enthalten. Die Fläche kann deswegen keine Ellipse enthalten. Jede Asymptotenebene der Fläche enthält entweder f_1 oder g_1 und gehört deshalb zu einer der beiden Scharen von Richtungsebenen. Umgekehrt ist jede Richtungsebene auch eine Asymptotenebene.

Wenn die Hauptschnitte a und b kongruent sind, heißt das Paraboloid *gleichseitig*. f und g sind in diesem Falle aufeinander senkrecht, und dasselbe gilt von den Richtungsebenen. Dieses Paraboloid geht durch eine halbe Umdrehung um f oder g in sich selbst über.

Geradlinige Kegelschnittflächen.

239. *Der geometrische Ort für die Schnittlinien entsprechender Ebenen in zwei projektiven (nicht kollokalen und nicht perspektiven) Ebenenbüscheln ist eine Kegelschnittfläche.* Eine beliebige Ebene, die keine der Büschelachsen enthält, wird nämlich von den beiden Ebenenbüscheln in projektiven Strahlenbüscheln geschnitten, und die entsprechenden Strahlen dieser beiden Büschel schneiden sich in den Punkten eines Kegelschnittes, wenn die Büschel nicht kollokal und nicht perspektiv sind. Die Schnittlinie der Fläche mit einer beliebigen Ebene ist also ein Kegelschnitt oder ein Linienpaar, und die Fläche selbst eine Kegelschnittfläche. Schneiden die Achsen der Ebenenbüschel einander, so wird die erzeugte Fläche ein Kegel, dessen Spitze in dem Schnittpunkt der beiden Achsen liegt. Schneiden die Achsen einander nicht, so wird die Fläche ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid. Das letztere dann, wenn eine der Büschelachsen unendlich fern ist, oder wenn die zwei parallelen Ebenen, die in den Ebenenbüscheln enthalten sind, einander in der projektiven Beziehung entsprechen.

240. *Die Verbindungslinien entsprechender Punkte in zwei projektiven Punktreihen mit windschiefen Trägern erfüllen eine Kegelschnittfläche.* Wenn man nämlich die Punkte einer jeden der beiden Punktreihen aus dem Träger der anderen Punktreihe durch Ebenen projiziert, so erhält man zwei projektive Ebenenbüschel, und die Schnittlinien entsprechender Ebenen dieser Ebenenbüschel fallen

mit den Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Punktreihen zusammen.

Wenn die Punktreihen einander ähnlich sind, also ihre unendlich fernen Punkte einander entsprechen, so wird die erzeugte Fläche ein hyperbolisches Paraboloid. In den übrigen Fällen ist sie ein einschaliges Hyperboloid.

241. *Eine gerade Linie, die sich so bewegt, daß sie beständig drei feste gerade Linien schneidet, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, erzeugt eine Kegelschnittfläche.* Man findet nämlich die Linien, welche drei gegebene gerade Linien schneiden, indem man aus zweien von diesen die Punkte der dritten durch Ebenen projiziert und diese Ebenen zum Schnitt bringt. Die so entstehenden Ebenenbüschel sind aber projektiv, weil sie dieselbe Punktreihe enthalten, und erzeugen deshalb eine Kegelschnittfläche.

Sind die drei geraden Linien eigentliche Linien, die nicht derselben Ebene parallel sind, so wird die Fläche ein Hyperboloid, dessen Zentrum man auf folgende Weise bestimmen kann. Es seien f_1, f_2, f_3 die drei gegebenen Linien (Fig. 220). Man bestimme dann eine Linie g_1, die f_2 und f_3 schneidet und zu f_1 parallel ist, eine Linie g_2, die f_3 und f_1 schneidet und zu f_2 parallel ist, endlich eine Linie g_3, die f_1 und f_2 schneidet und zu f_3 parallel ist. Die Linien g_1, g_2, g_3 sind dann Erzeugende und die Ebenen $f_1 g_1$, $f_2 g_2$ und $f_3 g_3$ Asymptotenebenen der Fläche, da sie diese alle in zwei parallelen Linien schneiden. Den gesuchten Mittelpunkt O findet man darauf als den Schnittpunkt der drei Asymptotenebenen. Beachtet man, daß O der Mittelpunkt des Parallepipedons ist, von dem die sechs Geraden $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ Kanten sind, so sieht man, daß O der Mittelpunkt jeder der Hauptdiagonalen in dem windschiefen Sechseck $f_1 g_3 f_2 g_1 f_3 g_2$ wird. Den Asymptotenkegel kann man durch die drei Tangentialebenen $f_1 g_1$, $f_2 g_2$, $f_3 g_3$ und die Berührungslinien dieser Ebenen finden, die der Reihe nach zu f_1, f_2 und f_3 parallel sind.

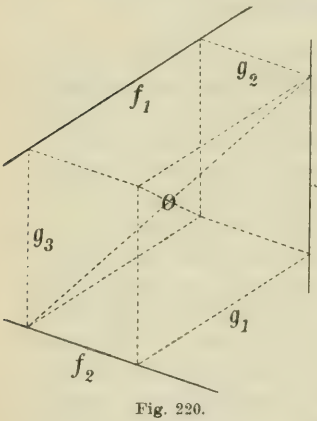


Fig. 220.

Konstruktionen.

242. Für die Parallelprojektion eines Ellipsoids wird die Begrenzung eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Projektion O' von dem Mittelpunkt O des Ellipsoids ist. Der durch die berührenden Projektionsstrahlen gebildete Zylinder berührt nämlich das Ellipsoid längs einer Ellipse, deren Projektion die Umrißellipse ist. Wir wollen nun die Umrißellipse näher betrachten.

Die projizierende Ebene, die durch die eine Achse z des Ellipsoids geht, schneidet dieses in einer Ellipse e, deren eine Halbachse OC in z fällt, während die andere Halbachse OD in der xy-Ebene liegt (Fig. 221). Die Projektion D' von D kann man also finden als den Schnittpunkt der Projektion z' von z mit der Ellipse, von welcher die Projektionen $O'A'$ und $O'B'$ der beiden anderen Halbachsen des Ellipsoids zwei konjugierte Halbmesser bilden. Die Konstruktion läßt sich nach 135 mit Hilfe einer affinen Perspektivität ausführen. Mit Hilfe von $O'C'$ und $O'D'$ kann man nun den Endpunkt M' des Linienstücks, in das e projiziert wird, finden. Wie wir früher (136) gezeigt haben, ist nämlich $O'M'$ die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, von welchem $O'C'$ und $O'D'$ die Katheten sind. $O'M'$ wird dann ein Halbmesser der gesuchten Umrißellipse k.

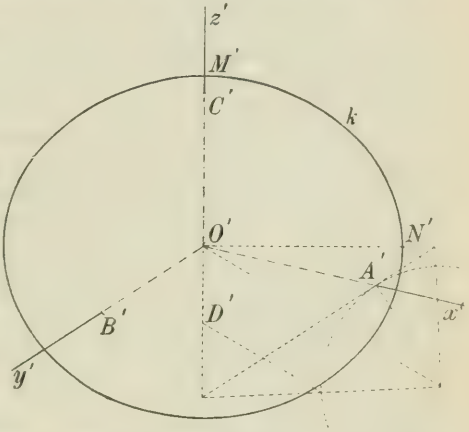


Fig. 221.

Wir bestimmen nun den Halbmesser ON, der in dem Hauptschnitt der xy-Ebene zu OD konjugiert ist, indem wir zur Konstruktion beständig die angegebene Affinität benutzen. Die Tangentialebene des Ellipsoids in N ist sowohl zu OD als auch zu z parallel und mithin eine projizierende Ebene (die zu der z projizierenden Ebene parallel ist). Die Projektion N' von N gehört deshalb mit zum Umriß, und da gleichzeitig die Umrißtangente in N die Spur der Tangentialebene des Ellipsoids in N und somit parallel zu z' ist, werden $O'N'$ und $O'M'$ konjugierte Halb-

messer der Umrißellipse, und diese ist derart vollständig bestimmt.

Die Konstruktion bleibt unverändert bestehen, wenn man für OA, OB und OC irgendwelche konjugierte Halbmesser des Ellipsoids nimmt.

243. Wenn nun wie in Fig. 221 der Umriß k zugleich mit den Linien x' und z' samt dem Punkte C' gegeben ist, so ist die ganze Figur festgelegt. z' schneidet nämlich zunächst k in M', hierauf wird $O'N'$ als der zu $O'M'$ konjugierte Halbmesser bestimmt; da weiter $O'D'$ durch $O'C'$ und $O'M'$ bestimmt ist, sieht man leicht, wie man A' und B' finden kann.

So kann man erkennen, daß die Figur die Parallelprojektion eines jeden Ellipsoids bilden kann, das einem Zylinder mit der Spur k in der Bildebene einbeschrieben ist, wenn man die Projektionsrichtung den Seitenlinien des Zylinders parallel annimmt. Ein derartiges Ellipsoid enthält nämlich notwendigerweise ein System konjugierter Halbmesser OA, OB und OC, die in $O'A'$, $O'B'$ und $O'C'$ projiziert werden. Zunächst wird nämlich C' die Projektion eines Punktes C auf der Fläche (es gibt hierbei zwei Möglichkeiten, von denen wir aber nur die eine ins Auge fassen), und sodann kann man in der Durchmesserebene, die zu OC konjugiert ist, einen Durchmesser x finden, dessen Projektion x' ist. Damit sind aber, wie wir oben gesehen haben, alle Bedingungen erfüllt.

Unter allen Ellipsoiden, die durch die angegebene Figur dargestellt werden können, finden sich auch Kugeln, da jede Kugel, die einem durch k hindurch gelegten Rotationszylinder einbeschrieben ist, die Bedingungen erfüllt. Drei konjugierte Halbmesser der Kugel sind aber gleich groß und paarweise aufeinander senkrecht, und wir haben somit den *Pohlkeschen Satz*[1]) bewiesen:

---

1) K. Pohlke, *Darstellende Geometrie,* Berlin 1860. 4. Aufl. 1876, S. 109 ff.

H. A. Schwarz, *Elementarer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes,* Journal für die r. u. a. Math. Bd. 63, S. 309—314, 1864.

Fr. Schur, *Über den Pohlkeschen Satz,* Journ. f. d. r. u. a. Math. Bd. 117, S. 24—28, 1897 (wo man auch eine einfache Konstruktion der Umrißellipse findet); Math. Annalen Bd. 25, S. 596 f., 1885 (hier die projektive Verallgemeinerung).

Fr. Schilling, *Über den Pohlkeschen Satz,* Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 48, S. 487—494, 1903, wo weitere Literatur zusammengestellt ist.

Th. Schmid, *Zur Konturbestimmung d. Flächen 2. Grades (Pohlkes Satz),* Wien. Ber. 113. Abt. IIa, S. 1423—33, 1904.

Drei willkürliche Linienstücke $O'A'$, $O'B'$ und $O'C'$, die von demselben Punkt O' ausgehen und in derselben Ebene liegen, aber nicht zu derselben Linie gehören, lassen sich immer als Parallelprojektion von drei gleich großen Strecken im Raume, die paarweise zueinander senkrecht sind, ansehen. Da man durch k im allgemeinen zwei Rotationszylinder legen kann, sieht man, daß die Projektionsrichtung auf zwei verschiedene Arten angenommen werden kann.

244. Wird ein Ellipsoid in der Parallelprojektion durch die Projektionen $O'A'$, $O'B'$ und $O'C'$ von drei konjugierten Halbmessern dargestellt, so ist die Fläche dadurch nicht bestimmt, aber manche Konstruktionen lassen sich doch ohne weitere Kenntnis der Fläche ausführen. So ist z. B. klar, daß die Projektion der Schnitte der Fläche mit den je zwei der gegebenen Durchmesser verbindenden Ebenen vollständig bestimmt sind, und wenn man wie in 46 das durch die drei Halbmesser bestimmte Koordinatensystem zur Darstellung benutzt, so kann man den Schnitt der Fläche mit jeder Linie und jeder Ebene darstellen, ebenso wie man die Tangentialebenen an die Fläche durch eine gegebene Linie legen und ihr einen Kegel mit gegebener Spitze umschreiben kann.

Alle Konstruktionen, die man so ausführt, sind gemeinsam für alle Ellipsoide, die durch die gegebene Figur dargestellt werden, und da unter diesen Ellipsoiden sich auch Kugeln finden, kann man die Aufgaben lösen unter der Voraussetzung, daß die Fläche wirklich eine Kugel ist. Man kann also die Aufgaben immer auf die entsprechenden Aufgaben für die Kugel in doppelter Projektion zurückführen, indem man die Transformation in 51 benützt.

245. Bei einer doppelten Projektion, bei der die Achsen des Ellipsoids so liegen, daß zwei der Hauptebenen den Projektionsebenen parallel sind oder mit ihnen zusammenfallen, kann die Fläche durch zwei senkrechte perspektivische Affinitäten mit diesen zwei Hauptebenen als Affinitätsebenen in eine Kugel verwandelt werden. Bei der einen dieser beiden Affinitäten bleiben die Grundrißprojektionen an ihrer Stelle, während die Aufrißprojektionen sich in ihren Vertikalen verschieben, bei der anderen bleiben die Aufrißprojektionen unverändert. Man kann den Schnitt der Fläche mit einer irgendwie gegebenen geraden Linie so leicht bestimmen, indem man zunächst den Schnitt der entsprechenden Kugel mit der transformierten geraden Linie bestimmt.

246. Ist ein einschaliges Hyperboloid in einer beliebigen Parallelprojektion so gegeben, daß die zwei Halbachsen OA und OB in die Strecken $O'A'$ und $O'B'$ auf x' und y' projiziert werden,

während die dritte Achse durch z' dargestellt wird, und ist ferner eine der Asymptoten in dem Hauptschnitt der xz-Ebene gegeben, so kann man unmittelbar die Projektion als von einem Umdrehungshyperboloid herrührend deuten, indem man die Projektion des Hauptschnittes der xy-Ebene als von einem Kreis herrührend auffaßt, und die in 51 angegebene Transformation anwendet.

Ist das Hyperboloid in doppelter Projektion dargestellt, und die Achse z, die die Fläche nicht schneidet, senkrecht zum Grundriß, so kann man die Fläche durch eine Affinität, von der die xz-Ebene die Affinitätsebene bildet, in ein Umdrehungshyperboloid überführen. Ist die x-Achse der Aufrißebene parallel, so ändern sich bei dieser Transformation nur die Grundrißprojektionen.

247. In Fig. 222 ist die Parallelprojektion eines hyperbolischen Paraboloids gezeichnet, dessen Hauptebenen xz und yz sind.

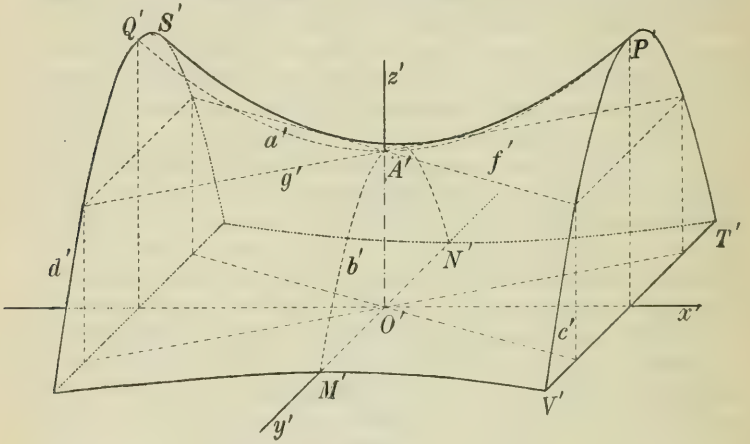


Fig. 222.

Der Scheitel A ist gegeben, und von den beiden Hauptschnitten a und b kennt man die Punkte M und P (M liegt auf der y-Achse und P ist ein willkürlicher Punkt der xz-Ebene). Symmetrisch zu M und P bezüglich der z-Achse findet man sofort die Punkte N und Q. Die Projektionen a' und b' der Hauptschnitte kann man dann leicht zeichnen. Die Ebenen, die man durch P und Q parallel zur yz-Ebene legt, schneiden die Fläche in zwei Parabeln, c und d, die mit b kongruent sind. Ihre Projektionen c' und d' sind ebenfalls kongruent mit b'. Die Punkte V und T, in denen c die xy-Ebene schneidet, kann man deshalb finden, indem man zunächst

auf b' die Punkte sucht, für welche der Abstand von der zu der xy-Ebene parallelen Tangentialebene des Scheitels gleich dem Abstand der Punkte P und Q von der x-Achse wird. Die xy-Ebene schneidet die Fläche in einer Hyperbel mit den Scheitelpunkten M und N, die durch V und T geht. Diese Hyperbel kann leicht konstruiert werden. Die Schnittlinien f und g der Fläche mit der Tangentialebene im Scheitel A findet man, indem man auf den Parabeln c und d die Punkte bestimmt, deren Abstand von der xy-Ebene gleich OA wird.

Da eine umschriebene Zylinderfläche das Paraboloid längs einer Parabel berührt, wird der Umriß k der Projektion eine Parabel. Die Richtung der Erzeugenden des längs d der Fläche umschriebenen Zylinders wird durch die Tangente von a im Punkte Q gegeben. Eine Tangente von d' parallel zur Tangente von a' in Q' berührt deshalb d' in einem Punkte S' des Umrisses. Denn in dem so bestimmten Punkte S auf d ist die Tangentialebene des längs d umschriebenen Zylinders, also auch des Paraboloids eine projizierende Ebene. Der Umriß berührt d' in S' Ebenso kann man auch den Punkt finden, in dem c' von der Umrißkurve berührt wird. Diese ist so vollständig bestimmt, da man zwei ihrer Punkte mit den zugehörigen Tangenten kennt. z' wird von ihr ein Durchmesser. Sie muß f' und g' berühren, da die projizierenden Ebenen durch f und g Tangentialebenen der Fläche sind. Allgemein ergibt sich, daß die Umrißkurve die Projektion aller Erzeugenden der Fläche berührt.[1])

Stereographische Projektion.

248. Wenn eine konvexe Kegelschnittfläche aus einem ihrer Punkte S auf eine Ebene Π projiziert wird, welche die Tangentialebene Σ in S in unendlicher Entfernung schneidet, so wird ein beliebiger Kegelschnitt k auf der Fläche, der nicht durch S geht, in einen Kegelschnitt k' projiziert, der zu dem Kegelschnitt k_1, in dem Π oder eine dazu parallele Ebene die Fläche schneidet, ähnlich und in ähnlicher Lage ist (Fig. 223).

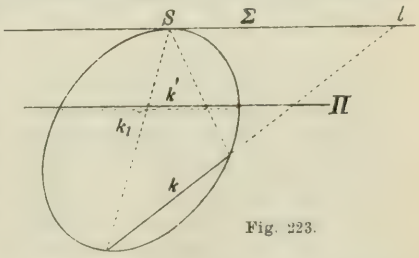


Fig. 223.

1) Zu diesem Abschnitt vgl. man Rohn-Papperitz, Lehrbuch d. darst. Geometrie, III. Bd., 3. Aufl., 1906, S. 161 ff.

Beweis: Die Ebene von k schneide Σ in der Linie l. Es mögen A und A_1 ein Paar konjugierter Punkte auf l sein, SA und SA_1 sind dann reziproke Polaren bezüglich der Fläche, und die unendlich fernen Punkte A' und A_1' dieser Linien sind deshalb konjugiert bezüglich der Fläche, also auch bezüglich k_1. Da nun A' und A_1' bei der betrachteten Projektion die Bildpunkte von A und A_1 werden und diese letzteren Punkte bezüglich k konjugiert sind, sind A' und A_1' auch konjugiert bezüglich k'. k_1 und k' haben also die konjugierten unendlich fernen Punktepaare gemeinsam und sind deshalb ähnlich (137).

Der Mittelpunkt von k' ist der Pol der unendlich fernen Linie und deshalb der Bildpunkt des Poles L der Linie l bezüglich k. Aber L liegt auf der Polare von l bezüglich der Fläche, und diese Polare ist die Verbindungslinie von S mit dem Pol der Ebene des Kegelschnittes k. Folglich: *Der Mittelpunkt von k' ist der Bildpunkt des Poles der Ebene, in der k liegt.*

249. Wenden wir diese Projektion auf eine Kugel an, so werden alle Kreise auf der Kugel wieder als Kreise abgebildet. In diesem besonderen Falle wird die Abbildung gleichzeitig konform, d. h. die Winkel, unter denen zwei beliebige Kurven auf der Fläche einander schneiden, werden in ihrer wahren Größe dargestellt. Sind nämlich (Fig. 224) AB und AC Tangenten der Kugel in A, die in $A'B'$ und $A'C'$ projiziert werden und die Tangentialebene in S in B und C schneiden, so findet man $\sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle BSC = \sphericalangle BAC$. Die beiden letzten Winkel sind gleichliegende Winkel in den zwei kongruenten Dreiecken BSC und BAC.

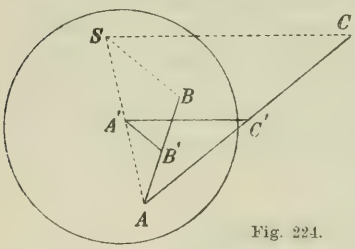


Fig. 224.

Die stereographische Projektion findet eine praktische Anwendung beim Kartenzeichnen. Will man auf diese Weise die östliche Halbkugel auf die begrenzende Meridianebene M abbilden, so wählt man das Projektionszentrum in dem Punkte der westlichen Halbkugel, dessen Tangentialebene zu M parallel ist. Die Meridiane werden dann als ein Kreisbüschel dargestellt, dessen Grundpunkte in den Nord- und Südpol fallen, während die Breitenkreise als ein Büschel von Kreisen dargestellt werden, die die Kreise des ersten Büschels unter rechten Winkeln schneiden.

250. Projiziert man ein elliptisches Paraboloid aus dem

unendlich fernen Punkt der Fläche, so wird in der vorhin charakterisierten Projektion die Ebene Σ unendlich fern, und die Bildebene Π kann man willkürlich wählen, nur nicht parallel zur Achse. Hieraus erkennt man, daß die Kurve, in der eine beliebige Ebene Π das Paraboloid schneidet, ähnlich ist zu der Kurve, in der dieselbe Ebene einen Zylinder schneidet, dessen Seitenlinien parallel zur Achse des Paraboloids sind und dessen Leitkurve ein ebener Schnitt des Paraboloids ist. Mit Hilfe dieses Satzes kann man sofort die *Kreisschnitte des Paraboloids* finden. In Fig. 225 ist C der Scheitelpunkt der Fläche, die Achse ist vertikal, und die horizontale Spur ist eine Ellipse mit den Halbachsen OA und OB. Die Ebenen, die den vertikalen Zylinder, der durch diese Ellipse geht, in Kreisen schneiden, schneiden auch das Paraboloid in Kreisen. Macht man $AM \perp OA$ und $OM = OB$, so geben OM und die dazu bezüglich OC symmetrische Linie OM' die Stellungen der Kreisschnitte des Paraboloids an.

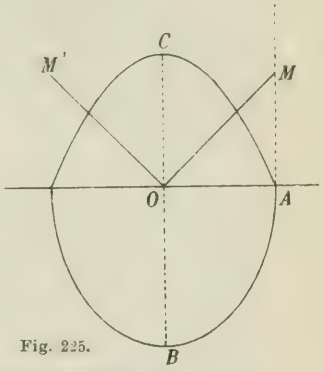


Fig. 225.

Die ebenen Schnitte eines Umdrehungsparaboloids gehen durch senkrechte Projektionen auf eine zur Achse der Fläche senkrechte Ebene in Kreise über.

Kreisschnitte.

251. *Wenn ein Kegel und eine beliebige Kegelschnittfläche einen Kegelschnitt gemeinsam haben, so schneiden sie einander in noch einem Kegelschnitte oder berühren einander im besonderen Fall längs des gegebenen Kegelschnittes.* Es ist dabei vorausgesetzt, daß die Spitze des Kegels nicht auf der Fläche liegt.

In einer harmonischen perspektivischen Kollineation, von welcher die Spitze des Kegels das Zentrum ist, während dessen Polarebene bezüglich der Kegelschnittfläche als Kollineationsebene gewählt wird, entspricht jede der beiden Flächen sich selbst. Der gegebene Kegelschnitt k entspricht dann einem neuen Kegelschnitt k_1, der auf beiden Flächen liegt. Insbesondere kann k_1 mit k zusammenfallen, dies geschieht, wenn die Polarebene der Kegelspitze mit der Ebene von k zusammenfällt, die beiden Flächen berühren dann einander längs k.

Der Satz kann insbesondere auf zwei Kegel angewendet werden.

252. *Wenn ein Kegel zweiter Ordnung und eine beliebige Kegelschnittfläche einander in zwei Punkten P und Q berühren, so besteht die Schnittkurve der Flächen, wenn sie überhaupt existiert, aus zwei Kegelschnitten, die beide durch P und Q hindurchgehen.* Die beiden Kegelschnitte können insbesondere zusammenfallen, indem dann der Kegel der Kegelschnittfläche umschrieben ist. Wir setzen voraus, daß die Kegelspitze S nicht auf der Kegelschnittfläche liegt; die Linie PQ ist dann in keiner der Flächen enthalten.

Sei R ein gemeinsamer Punkt der beiden Flächen, der von P und Q verschieden ist. R kann dann nicht auf PQ liegen, da PQ sonst auf den beiden Flächen liegen müßte, was der Voraussetzung widerspricht. R kann auch nicht der Tangentialebene in P oder Q angehören, sonst müßte nämlich RP oder RQ eine gemeinsame Gerade der beiden Flächen sein. Die Ebene PQR muß also notwendigerweise die zwei Flächen in eigentlichen Kegelschnitten treffen, aber diese Kegelschnitte müssen zusammenfallen, da sie durch P, Q und R gehen, und die Tangenten in P und Q für beide Kegelschnitte die Schnittlinien der Ebene PQR mit den gemeinsamen Tangentialebenen der Flächen in P und Q werden. Die Flächen haben also auf jeden Fall einen Kegelschnitt gemeinsam und deshalb nach dem vorhergehenden Satz im allgemeinen auch noch einen anderen Kegelschnitt.

253. Wenn eine Ebene Π eine Kegelschnittfläche in einem Kreise schneidet, so wird dieser auch von jeder zu Π parallelen Ebene in einem Kreise geschnitten, und die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf einem Durchmesser d. Ist d senkrecht zu Π, so muß die Fläche eine Umdrehungsfläche sein. Ist d nicht senkrecht zu Π, so muß eine Ebene durch d, die auf Π senkrecht steht, alle Kreise symmetrisch teilen, diese Ebene ist deshalb eine Symmetrieebene der Fläche. Folglich: *Jeder Kreisschnitt liegt in einer Ebene, die zu einer Symmetrieebene der Fläche senkrecht ist.*

Was wir hier ausgeführt haben, gilt für alle Kegelschnittflächen, auch für Kegel, und wir wollen es anwenden, um die Kreisschnitte eines Kegels mit vertikaler Achse zu finden (Fig. 226), dessen Spitze S und dessen Grundrißspur eine Ellipse mit den Halbachsen OA und OB ist (OB fällt in die trennende Achse). Wenn die zur Aufrißebene senkrechte Ebene Γ den Kegel in einem Kreis schneidet, so schneidet die zu Γ bezüglich der Symmetrieebene SOA symmetrische Ebene Γ' den Kegel auch in einem Kreis. Da die beiden Kreise sich in zwei Punkten schneiden,

liegen sie auf einer Kugel, und diese berührt den Kegel in den Schnittpunkten der Kreise. Der Kugelmittelpunkt fällt auf die Kegelachse OS. Umgekehrt hat eine Kugel, welche den Kegel in zwei Punkten berührt und weitere Punkte mit der Fläche gemein hat, zwei Kreisschnitte mit ihm gemein. Wir finden deshalb die Stellung der Kreisschnitte durch folgende Konstruktion: Man drehe SA um die Kegelachse herum in die Aufrißebene hinein, auf der so entstehenden Linie SA_1 wähle man einen Punkt P_1 und schlage einen Kreis, dessen Mittelpunkt C auf SO liegt und der SA_1 in P_1 berührt. Die Kugel, von welcher dieser Kreis ein größter Kreis ist, schneidet dann den Kegel in zwei Kreisen, deren Aufrißprojektionen a und b sind.

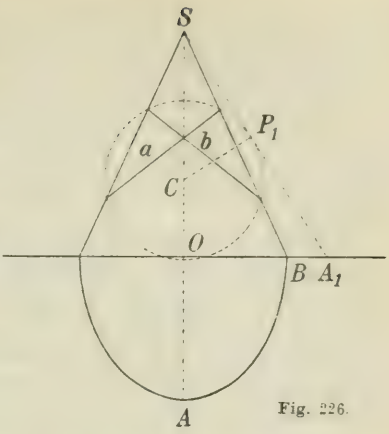


Fig. 226.

254. Wir suchen nun die Kreisschnitte eines Ellipsoids, dessen Halbachsen OA, OB und OC seien (Fig. 227). In der Figur ist $OA > OB > OC$ angenommen; O, A, C liegen in der Aufrißebene, O, A, B in der Grundrißebene. Wenn wir zunächst die Kreisschnitte bestimmen wollen, deren Ebenen durch den Mittelpunkt O gehen, und dabei benützen, daß jede der gesuchten Ebenen auf einer Symmetrieebene des Ellipsoids senkrecht steht, so sehen wir, daß die gesuchte Ebene durch eine der Linien OA, OB und OC hindurchgehen muß; OA und OC (die größte und die kleinste Halbachse) liefern aber keine reellen Lösungen, hingegen kann man durch OB wirklich zwei Ebenen legen, welche die Fläche in Kreisen schneiden. Die Ellipse AC hat nämlich zwei Halbmesser, deren Längen gleich OB sind, denn der Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OB schneidet die Ellipse in vier Punkten. Die Verbindungslinien e und e' dieser Schnittpunkte mit dem Mittelpunkt O fallen mit den Aufrißprojektionen der gesuchten

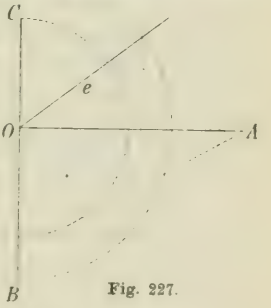


Fig. 227.

Kreise zusammen. Die Kreise selbst sind die Schnittkurven des Ellipsoids und einer Kugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OB. Die anderen Kreise des Ellipsoids werden erzeugt durch dessen Schnitt mit Ebenen, die zu den gefundenen Ebenen parallel sind.

Die Punkte auf dem Ellipsoid, deren Tangentialebenen den Ebenen der gefundenen Kreisschnitte parallel sind, heißen *Kugelpunkte* (Nabelpunkte). Das allgemeine Ellipsoid enthält vier Kugelpunkte.

255. Auf dem Hyperboloid kann man die Stellung der Kreisschnitte bestimmen, indem man die Kreisschnitte des Asymptotenkegels sucht. Eine Ebene Π, die den Asymptotenkegel in einem Kreis schneidet, schneidet nämlich auch das Hyperboloid in einem Kreise, denn der Asymptotenkegel und das Hyperboloid haben dieselbe Schnittkurve mit der unendlich fernen Ebene gemeinsam und haben sonach auch in dieser Ebene alle konjugierten Punktepaare gemeinsam; die beiden Schnittkurven in der Ebene Π haben also gemeinsame konjugierte Punktepaare auf der unendlich fernen Linie von Π und sind deswegen ähnlich. Das allgemeine zweischalige Hyperboloid enthält vier Kugelpunkte.

Auf dem einschaligen Hyperboloid kann man die Kreisschnitte durch das Zentrum auch dadurch bestimmen, daß man den Schnitt des Hyperboloids mit einer Kugel über der großen Achse der Kehlellipse als Durchmesser sucht. Dieses erkennt man durch eine ähnliche Überlegung, wie wir sie oben für das Ellipsoid angestellt haben. Die Konstruktion führt man am leichtesten aus, indem man die Schnittpunkte S und T der Kugel mit einem Regelstrahl des Hyperboloids bestimmt. Die gesuchten Ebenen gehen dann durch S und T hindurch. Das einschalige Hyperboloid enthält keine Kugelpunkte.

Wie man die Kreisschnitte eines elliptischen Paraboloids findet, haben wir bereits in 250 angegeben. Das hyperbolische Paraboloid hat keine Kreisschnitte.

Zehntes Kapitel.

Raumkurven.

Einfache Bögen im Raume.

256. Unter dem *Richtungskegel eines Kurvenbogens im Raume* verstehen wir einen Kegel, dessen Seitenlinien zu den Tangenten des Bogens parallel sind. Die Spitze des Kegels kann beliebig gewählt werden.

Der Bogen heißt *einfach*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. Kein Teil des Bogens darf eben oder geradlinig sein. 2. Jeder Punkt des Bogens muß zwei entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten haben. 3. Der Richtungskegel muß einfach sein, d. h. es muß wenigstens eine Ebene existieren, die ihn in einem einfachen ebenen Bogen schneidet, dieser Bogen kann dann als Leitkurve des Kegels benutzt werden. 4. Wenn ein Punkt M den gegebenen Bogen AB in einem bestimmten Umlaufssinne durchläuft, soll die Tangente in M ihre Richtung beständig derart ändern, daß die zugehörige Seitenlinie des Richtungskegels diesen kontinuierlich und monoton durchläuft (d. h. so, daß sie sich beständig nach derselben Seite hin auf dem Kegel bewegt). Die eine Mantelhälfte des Richtungskegels bestimmt die Richtung der vorwärtslaufenden Halbtangente, die andere Mantelhälfte die Richtung der rückwärtslaufenden Halbtangente.

Da von dem Richtungskegel höchstens zwei Seitenlinien einer gegebenen Ebene parallel sind, können von dem Bogen höchstens zwei Tangenten der Ebene parallel sein. So kann man erkennen, daß eine Ebene nicht vier Punkte P, Q, R, S mit dem Bogen gemein haben kann, denn sonst müßte (nach 201) jeder der Bögen PQ, QR, RS (wenn P, Q, R, S einander in dieser Reihenfolge auf dem Bogen folgen) mindestens einen Punkt enthalten, dessen Tangente der Ebene parallel ist (dieses wäre nämlich der Punkt, der auf dem betrachteten Bogen von der Ebene den größtmöglichen Abstand hat). Folglich: *Ein einfacher Bogen im Raume hat höchstens drei Punkte mit einer Ebene gemein.*

257. Unter der Schmiegungsebene eines einfachen Bogens in einem Punkte M versteht man die Grenzlage, der eine Ebene zustrebt, wenn sie beständig die Tangente m in M enthält und noch durch einen anderen Punkt N des Bogens geht, der nach M konvergiert. Daß die Schmiegungsebene eindeutig bestimmt ist, erkennt man wie folgt (Fig. 228): Der Bogen MN muß einen Punkt P enthalten, dessen Tangente p der Ebene mN parallel ist (201). Der Richtungskegel enthält zwei Seitenlinien m_1 und p_1, die zu m und p parallel sind, die Ebene mN ist deshalb der Ebene $m_1 p_1$ parallel. Wenn nun N nach M konvergiert, konvergiert auch P nach M und gleichzeitig konvergiert p_1 nach m_1, so daß die Ebene $m_1 p_1$ nach der Tangentialebene des Kegels längs m_1 konvergiert. Also hat die Ebene mN eine eindeutig bestimmte Grenzlage Γ, die der Tangentialebene Γ_1 des Richtungskegels längs m_1 parallel ist. Damit ist die Existenz der Schmiegungsebene bewiesen: *Jeder Punkt M eines einfachen Bogens hat eine bestimmte Schmiegungsebene. Diese ist der Tangentialebene des Richtungskegels längs der dem Punkt M entsprechenden Seitenlinie parallel.*

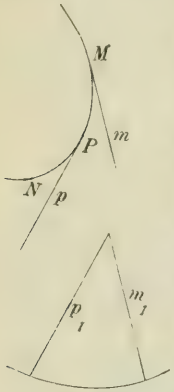


Fig. 228.

Eine Ebene, die drei beliebige Punkte A, B, C des Bogens enthält, ist zwei Tangenten p und q, einer an den Bogen AB, der anderen an den Bogen BC parallel, sie ist deshalb auch zwei Seitenlinien p_1 und q_1 des Richtungskegels, mithin der Ebene $p_1 q_1$, die diese Seitenlinien bestimmen, parallel. Läßt man A, B und C nach einem bestimmten Punkte M konvergieren, so konvergieren die beiden Seitenlinien p_1 und q_1 gleichzeitig nach der Seitenlinie m_1 des Kegels, die der Tangente in M parallel ist, während die Ebene $p_1 q_1$ nach der Tangentialebene des Kegels längs m_1 konvergiert. Aber die Ebene ABC konvergiert damit nach der Schmiegungsebene des Bogens in M, folglich:

Wenn drei veränderliche Punkte A, B, C des Bogens nach dem Punkte M konvergieren, muß die Ebene ABC notwendigerweise nach der Schmiegungsebene in M konvergieren. Der Punkt A kann insbesondere in M fest liegenbleiben.

Auf ganz ähnliche Weise beweist man, daß *eine Ebene, die durch einen festen Punkt M und die Tangente n in einen beweglichen Punkt N des Bogens gelegt wird, nach der Schmiegungsebene in M konvergiert, wenn N nach M konvergiert.*

Die Parallelprojektion eines einfachen Bogens.

258. Wir wollen nun dazu übergehen, die Parallelprojektion eines einfachen Bogens AB zu untersuchen, indem wir diesen auf eine gegebene Ebene Π in einer Richtung, die wir vorläufig als zu keiner Tangente des Bogens parallel voraussetzen, projizieren. Jede Tangente des Bogens AB projiziert sich dann als eine Tangente der Projektion $A'B'$, und jede Halbtangente, die zu einem Umlaufssinne von AB gehört, projiziert sich als eine Halbtangente, die zu dem entsprechenden Umlaufssinne von $A'B'$ gehört.

Die Fig. 229 zeigt den Bogen AB mit einem Punkte M und der zugehörigen Halbtangente m (für den Umlaufssinn AB) samt der Projektion $A'B'$ des Bogens mit dem Punkte M' und der zugehörigen Halbtangente m', weiter erblickt man den Richtungskegel (die Mantelhälfte, die zum Umlaufssinne AB gehört) mit der Spitze O, die Seitenlinie $m_1 \parallel m$ und die Projektion des Richtungskegels (m_1' $\parallel m'$). Denken wir uns, daß der Punkt M den Bogen AB von A bis B durchläuft, so durchläuft M' die Projektion $A'B'$, und m' bleibt beständig zu m_1' parallel, so daß seine Richtungsänderung ausschließlich durch m_1' bestimmt wird. Da nun m_1' sich beständig nach derselben Seite dreht, solange die Tangentialebene des Richtungskegels längs m_1 keine projizierende Ebene wird, während es seine Bewegungsrichtung umkehrt, wenn es eine solche Lage passiert, für welche die genannte Tangentialebene eine projizierende Ebene wird, und dieses höchstens zweimal eintreten kann, so erkennt man, daß der Bogen $A'B'$ aus einfachen Bögen besteht, daß er jedesmal einen Wendepunkt bekommen muß, wenn die Schmiegungsebene von AB eine projizierende Ebene wird, und daß es höchstens zwei solcher Wendepunkte geben kann.

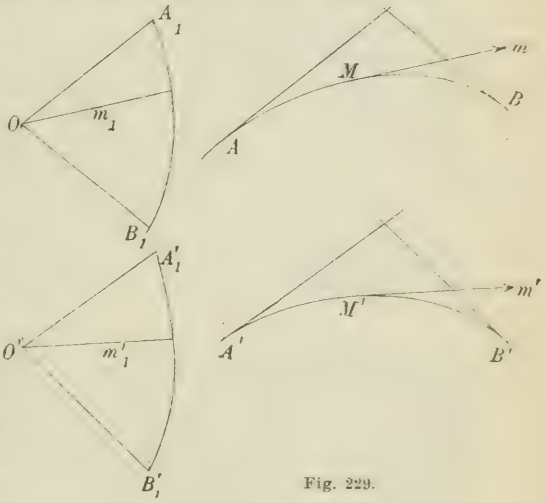


Fig. 229.

Der Bogen $A'B'$ kann möglicherweise einen Doppelpunkt besitzen, indem es einen Projektionsstrahl geben kann, der zwei Punkte M und N des vorgelegten Bogens enthält. — In diesem Falle werden M und N in denselben Punkt projiziert, und dieser wird ein *Doppelpunkt* der Projektion. Mehr als ein Doppelpunkt kann nicht vorkommen, da es sonst zwei Projektionsstrahlen geben müßte, die je zwei Punkte des Bogens AB enthielten, und sonach eine projizierende Ebene, die vier Punkte mit dem Bogen gemein hat, was unmöglich ist.

259. Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß keine Tangente des betrachteten Bogens ein Projektionsstrahl ist. Wir geben nun

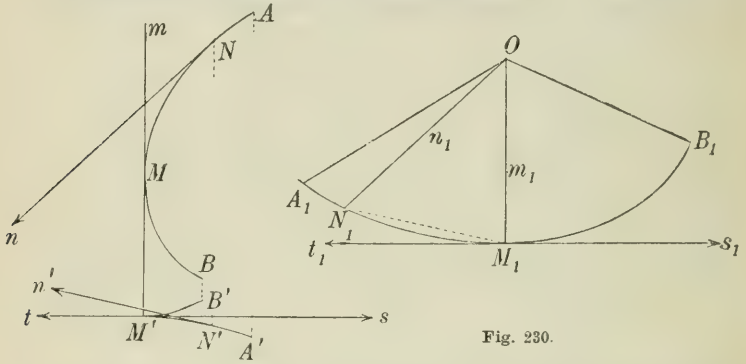


Fig. 230.

diese Voraussetzung auf, indem wir die Parallelprojektion in dem Falle untersuchen, wo der Bogen einen Punkt M enthält, dessen Tangente m ein Projektionsstrahl ist (Fig. 230). Die Spitze O des Richtungskegels liege außerhalb der Projektionsebene Π, und die Seitenlinie m_1 des Richtungskegels, die zu m parallel ist, werde von der Ebene Π im Punkte M_1 geschnitten. Wir betrachten ein Stück AB des Bogens, das M enthält, so daß der zugehörige Teil des Richtungskegels die Ebene Π in einem einfachen Bogen A_1B_1 schneidet, und wählen die Orientierung so, daß die Halbstrahlen, die von O nach dem Bogen A_1B_1 gehen, den Halbtangenten des Bogens AB für den Umlaufssinn AB parallel sind. Es entspricht so die Halbtangente n im Punkte N dem Halbstrahl $n_1 = ON_1$ auf dem Richtungskegel; die Parallelprojektion n' von n ist dann zu M_1N_1 parallel.

Wenn der Punkt N den Bogen AM von A bis M durchläuft, so durchläuft N_1 den Bogen A_1M_1, und der Halbstrahl M_1N_1 dreht sich beständig nach derselben Seite und konvergiert nach

der Halbtangente t_1 des Bogens M_1A_1 in M_1, wenn N nach M konvergiert. Infolgedessen dreht sich auch der Halbstrahl n', der M_1N_1 parallel ist, nach derselben Seite in demselben Sinne und konvergiert nach dem Halbstrahl $t \parallel t_1$, wenn N nach M konvergiert; da ferner der Halbstrahl $N'M'$ zu einer Halbtangente des Bogens $N'M'$ parallel ist, so wird dieser Halbstrahl nach t konvergieren, wenn N' nach M' konvergiert, und es folgt hieraus, daß die Parallelprojektion $A'M'$ von AM ein einfacher Bogen wird, dessen Halbtangente s in M' zu t entgegengesetzt gerichtet ist. — Der durch den Umlauf $A'M'$ des Bogens $A'M'$ bestimmte Drehsinn in der Ebene Π ist derselbe wie der durch den Umlauf A_1M_1 des Bogens A_1M_1 bestimmte Umlaufssinn.

Ebenso beweist man, daß der Bogen $B'M'$ ein einfacher Bogen ist, dessen Halbtangente in M' ebenfalls s ist, während der dem Umlauf $B'M'$ entsprechende Umlaufssinn übereinstimmt mit dem durch den Umlauf B_1M_1 des Bogens B_1M_1 bestimmten Umlaufssinn. Die beiden Bögen $A'M'$ und $B'M'$ bilden deshalb in M' eine Spitze erster Art mit der Halbtangente s (vgl. auch 261).

Die Ebene mt wird die Schmiegungsebene in M, da sie der Tangentialebene m_1t_1 des Richtungskegels parallel ist. Da die Schmiegungsebene mt die beiden Bögen $A'M'$ und $B'M'$ voneinander trennt, trennt sie auch die Bögen AM und BM. Folglich:

Die Schmiegungsebene teilt den Bogen in zwei Bögen, einen auf jeder Seite der Ebene.

Hingegen liegt bei jeder anderen Ebene durch die Tangente m die Umgebung des Punktes M auf derselben Seite der Ebene.

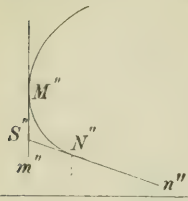
Wir vereinigen die für die Parallelprojektion des einfachen Bogens gefundenen Resultate in folgendem Satze:

Durch Parallelprojektion eines einfachen Bogens b im Raume entsteht eine ebene Kurve b', die aus einfachen ebenen Bögen besteht. Hat b eine Tangente, die ein Projektionsstrahl ist, so hat b' in dem entsprechenden Punkte eine Spitze erster Art, und die Tangente in dieser Spitze ist die Spur der Schmiegungsebene. Ist eine Schmiegungsebene eine projizierende Ebene, ohne daß die zugehörige Tangente ein Projektionsstrahl ist, so wird der dem Berührungspunkt entsprechende Punkt von b' ein Wendepunkt. Ist eine Sekante von b ein Projektionsstrahl, so entsteht ein Doppelpunkt von b'.

260. Eine feste Ebene Π, die durch die Tangente m in M geht, werde von der in einem anderen Punkte N berührenden Tangente n in einem Punkte S geschnitten. Wenn N dann nach M konvergiert, so konvergiert auch S nach diesem Punkte.

Dies zeigt man leicht mit Hilfe einer doppelten Projektion

(Fig. 231), bei der die Ebene Π zu der trennenden Achse senkrecht wird, während die Tangente m zu keiner Projektionsebene senkrecht ist. Man erkennt dann unmittelbar, daß S' und S'' nach M' und M'' konvergieren, d. h. S konvergiert nach M.



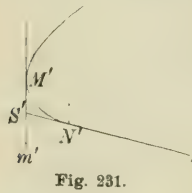


Fig. 231.

Die Schnittlinie der Schmiegungsebene A *in einem Punkte A und der Schmiegungsebene* B *in einem anderen Punkte B konvergieren nach der Tangente in A, wenn B nach A konvergiert.* Die genannte Schnittlinie kann nämlich einerseits durch den Schnittpunkt S der Schmiegungsebene A mit der Tangente in B und andererseits durch ihre Richtung bestimmt werden. Diese Richtung wird gegeben durch die Schnittlinie s der beiden Tangentialebenen A_1, B_1 des Richtungskegels, die zu A und B parallel sind. Wenn B nach A konvergiert, konvergiert nach dem Vorstehenden auch S nach A, während s in die Seitenlinie des Kegels, die der Tangente in A parallel ist, übergeht. So erkennt man, daß die Schnittlinie von A, B auch nach dieser Tangente konvergieren muß.

Die Schmiegungshalbebene.

261. Wir denken uns einen einfachen Bogen im Raume derart auf der Zeichenebene projiziert, daß keine Schmiegungsebene eine projizierende Ebene wird (Fig. 232). Wir betrachten nun einen bestimmten Punkt M des Bogens und grenzen um ihn ein solches Teil AB des gegebenen Bogens ab, daß die Projektion $A'B'$ ein einfacher Bogen wird. Wir wählen ferner einen Punkt N auf dem Bogen AB und bezeichnen die Halbtangenten in M und N, die dem Umlaufssinne NM bzw. MN entsprechen, mit m' bzw. n'. Die Halbebene, die von der Tangente in M begrenzt wird und die von den Punkten dieser Tangente ausgehenden, mit n gleich gerichteten Halbstrahlen enthält, bezeichnen wir mit $m(n)$. *Diese Halbebene konvergiert, wenn N in M übergeht, nach einer bestimmten Grenzlage.* Ihre

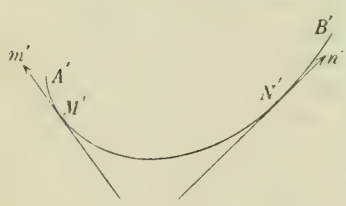


Fig. 232.

Projektion auf die Zeichenebene ist einmal eine feste Halbebene, die von m' begrenzt wird und den Bogen $A'B'$ enthält, und die Ebene, in der sie liegt, konvergiert nach der Schmiegungsebene in M. Die gesuchte Grenzlage der Halbebene wird also die Halbebene, die in der Schmiegungsebene liegt und auf die Zeichenebene in der Halbebene projiziert wird, die von m' begrenzt wird und $A'B'$ enthält. Die so bestimmte Halbebene heißt die *Schmiegungshalbebene* in M.

Wir erkennen nun sofort durch eine analoge Betrachtung, daß die Halbebene $m(N)$, die von der Tangente in M begrenzt wird und den Punkt N enthält, nach derselben Grenzlage konvergiert. Hieraus folgt aber weiter, daß eine beliebige Halbebene $m(P)$, die von der festen Tangente in M begrenzt wird und einen beliebigen Punkt P der veränderlichen Halbtangente n enthält, nach derselben Grenzlage konvergiert. Denn die Halbebene $m(P)$ liegt in dem konvexen Flächenwinkel, der von den Halbebenen $m(n)$ und $m(N)$ begrenzt wird, und da nun diese beiden nach der Schmiegungshalbebene konvergieren, gilt das gleiche auch für die erstgenannte Halbebene.

Man beweist auf genau dieselbe Weise, daß die Halbebenen, die von der veränderlichen Tangente in N begrenzt werden und einen beliebigen Punkt des Halbstrahls m (den Punkt M mitgerechnet) enthalten, nach der Schmiegungshalbebene in M konvergieren, wenn N in M übergeht.

Die Tangentenfläche eines einfachen Bogens.

262. Die Fläche, welche von den Tangenten eines Bogens gebildet wird, heißt die *Tangentenfläche* des Bogens. Ihre Schnittkurve mit einer Ebene Π ist der geometrische Ort für die Schnittpunkte der Tangenten mit dieser Ebene. Wir setzen vorläufig voraus, daß der Bogen keinen Punkt mit der Ebene gemein hat.

Seien M, N, P drei aufeinanderfolgende Punkte des Bogens und M_1, N_1 und P_1 die Schnittpunkte der im Umlaufssinne PNM genommenen Halbtangenten m, n und p mit der Ebene (Fig. 233). Lassen wir N und damit N_1 fest, während M und P nach N konvergieren, so konvergieren die Halbebenen $p(N_1)$ und $n(M_1)$ nach dem vorstehenden gegen dieselbe Halbebene, nämlich die Schmiegungshalbebene des gegebenen Bogens in N. Aber die Spuren der beiden genannten veränderlichen Halbebenen in Π sind die Halbstrahlen P_1N_1 und N_1M_1, und diese beiden müssen also nach einer gemeinsamen Grenzlage konvergieren. Daraus geht hervor, daß die gesuchte Schnittkurve im Punkte N_1 bestimmte entgegen-

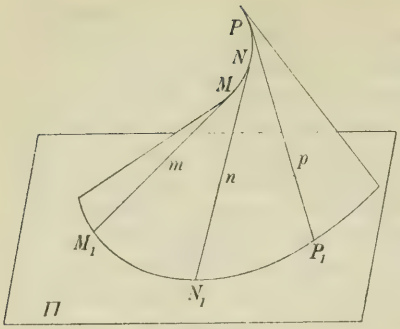


Fig. 233.

gesetzte Halbtangenten hat, und daß die Tangente der Schnittkurve die Spur der Schmiegungsebene des gegebenen Bogens in N ist.

Wenn man weiter bedenkt, daß die Schmiegungsebene der Tangentialebene des Richtungskegels parallel ist, und daß die Spur dieser Tangentialebene in Π sich beständig nach derselben Seite dreht (solange keine Seitenlinie des Kegels zu Π parallel ist), so folgt hieraus, daß die Schnittkurve in der Umgebung von N_1 ein einfacher Bogen sein muß.

263. Wir wollen nun annehmen, daß die Ebene Π einen Punkt M mit dem gegebenen Bogen gemein hat, aber die Tangente in M nicht enthält, und daß N und P ein voraufgehender und nachfolgender Punkt seien, mit den Tangenten n und p (Fig. 234).

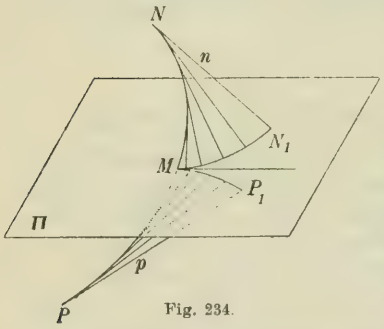


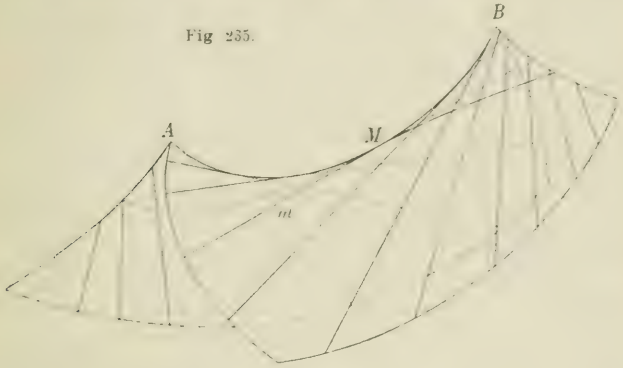
Fig. 234.

Lassen wir nun N und P nach M konvergieren, so konvergiert die Halbebene $n(M)$ und $p(M)$ nach der Schmiegungshalbebene in M, und ihre Spuren, die Halbstrahlen N_1M und P_1M, konvergieren also nach einer gemeinsamen Grenzlage, der Spur der Schmiegungshalbebene. Daraus folgt, daß die beiden Bögen MN_1 und MP_1 in M eine gemeinsame Halbtangente haben, so daß die Schnittkurve in diesem Punkte eine Spitze bekommt. Mit Hilfe des Richtungskegels erkennt man nun weiter, daß die Tangente der Schnittkurve sich nach derselben Seite dreht, wenn die Kurve in der Richtung N_1MP_1 durchlaufen wird. Die Spitze muß also von der ersten Art sein.

So findet man, daß die beiden Mäntel der Fläche, von denen der eine durch die vorwärts gehende Halbtangente, der andere durch die rückwärts gehende Halbtangente gebildet werden, so zusammenstoßen, daß längs des gegebenen Bogens eine scharfe Kante (*Rückkehrkante* oder *Spitzkante*) der Fläche entsteht.

Schneidet man die Fläche mit einer Ebene Π, welche die Tangente m in einem Punkte M der Spitzkante enthält, aber keine Schmiegungsebene ist, so schneidet die Ebene die Fläche zunächst in m, aber wie schon die Zeichnung vermuten läßt, außerdem in einer Kurve, von der M ein Wendepunkt und m die zugehörige Wendetangente ist (Fig. 235). Man beweist dieses durch ähnliche

Fig 235.



Überlegungen, wie sie bei den vorstehenden Untersuchungen verwendet worden sind.

Endlich wollen wir hervorheben, daß, wenn die Ebene Π die Schmiegungsebene in M ist, die Schnittkurve in der Umgebung von M ein einfacher Bogen wird.

Aus unserer Betrachtung geht hervor, daß *die Tangentenfläche eines einfachen Bogens im Raume von einer beliebigen Ebene in einer einfachen ebenen Kurve geschnitten wird.*

Einfache Raumkurven.

264. Unter einer einfachen Raumkurve verstehen wir eine solche Raumkurve, die man sich aus einfachen Bögen entstanden denken kann, indem zwei solche Bögen, wo sie zusammenstoßen, immer eine gemeinsame Tangente und eine gemeinsame Schmiegungsebene haben. Haben die beiden Bögen entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten, so sind vier verschiedene Fälle zu unterscheiden, entsprechend den vier Hauptformen, welche die Projektion der Kurve in der Richtung der Tangente annehmen kann. Diese vier Formen sind in den Figuren 236 a, b, c, d dargestellt, wobei in jeder Figur ein

Stück der projizierenden Zylinderfläche gezeichnet ist. Die Lage der Schmiegungsebene zur Kurve erkennt man unmittelbar aus den Figuren.

Außer diesen vier Formen von einfachen Kurven kann man noch vier aufstellen, die dem Falle entsprechen, wo die zusammen-

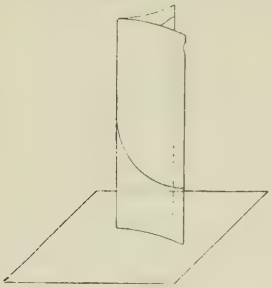


Fig. 236 a.

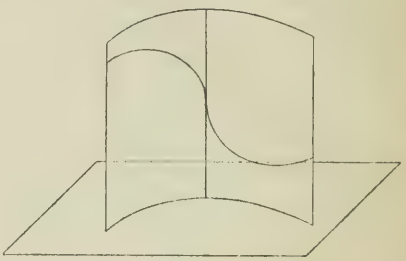


Fig. 236 b.

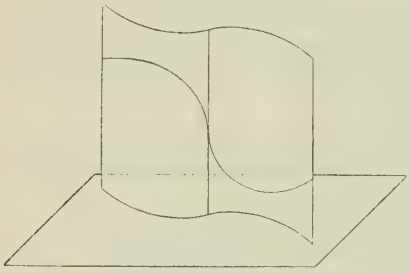


Fig. 236 c.

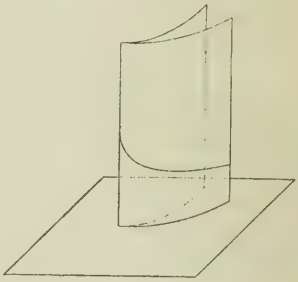


Fig. 236 d.

stoßenden einfachen Bogen gemeinsame Halbtangenten haben, so daß die Raumkurve eine Spitze bekommt. Wir überlassen es dem Leser, diese Formen analog den soeben betrachteten aufzuzeichnen.

In allen Fällen geht eine einfache Raumkurve durch Parallelprojektion in eine einfache ebene Kurve über.

265. Aus den Betrachtungen in 262—263 kann man ferner schließen, daß die Tangentenfläche einer einfachen Raumkurve von einer beliebigen Ebene in einer einfachen ebenen Kurve geschnitten wird.

Hiernach kann man weiter beweisen, daß *durch eine perspektivische Raumtransformation eine einfache Raumkurve k immer in eine einfache Raumkurve* k_1 *übergeht.*

Für eine affine Transformation ist dies unmittelbar einleuchtend, weil der Richtungskegel von k in den Richtungskegel von k_1 übergeht. Ist die Transformation nicht affin, so benutzt man folgende Überlegung: Die Fluchtebene in dem System, zu dem k gehört, schneidet die Tangentenfläche von k in einer einfachen ebenen Kurve, und diese ist die Leitkurve für den Richtungskegel von k_1, wenn man die Spitze des Kegels im Perspektivitätszentrum annimmt. Folglich ist k_1 eine einfache Raumkurve.

Wir können nun ferner beweisen, daß *eine einfache Raumkurve k durch Zentralprojektion in eine einfache ebene Kurve k' übergeht.*

Eine perspektivische Raumtransformation, welche das Zentrum der Zentralprojektion in einen unendlich fernen Punkt überführt, führt die Kurve k in eine einfache Raumkurve k_1 über, während k' gleichzeitig in eine Parallelprojektion von k_1 übergeht, also in eine einfache ebene Kurve. k' muß deshalb selbst eine einfache ebene Kurve sein (vgl. noch die Bemerkung in 266).

Ein wichtiger Satz, der gestattet zu beurteilen, ob eine vorgelegte Raumkurve eine einfache Kurve ist, ist der folgende: *Wenn eine Raumkurve in jedem Punkte bestimmte entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten hat, und ihre Tangentenfläche eine ebene Schnittkurve enthält, die eine einfache Kurve ist, so ist die Raumkurve selbst stets eine einfache Kurve.*

Durch eine perspektivische Raumtransformation, welche den gegebenen ebenen Schnitt in die unendlich ferne Ebene überführt, geht nämlich die gegebene Raumkurve in eine einfache Raumkurve über.

266. Betreffs der Zentralprojektion eines einfachen Bogens ist noch zu bemerken, daß ganz ähnliche Verhältnisse hinsichtlich der Entstehung von Wendepunkt, Spitze und Doppelpunkt obwalten wie bei der Parallelprojektion. Dieses folgt sofort aus den aufgestellten Sätzen über die Schmiegungsebene und Schmiegungshalbebene.

Eine Bemerkung müssen wir noch machen, welche den Fall betrifft, wo das Zentrum O der Zentralprojektion auf der Kurve selbst liegt (Fig. 237). In diesem Falle liefert der Punkt O ja nicht eigentlich eine Projektion, aber da die Linie OM nach der Tan-

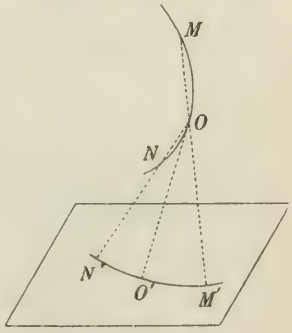


Fig. 237.

gente in O' konvergiert, wenn M nach O konvergiert, liegt es nahe, die Spur O' dieser Tangente als Projektion von O aufzufassen. Tut man dieses, so erreicht man, daß man einen zusammenhängenden Bogen $M'O'N'$ als Projektion des Bogens MON erhält. Hierauf ist die Tangente des Bogens $M'O'N'$ in O' bestimmt als die Grenzlage der Linie $O'M'$, wenn M' nach O' konvergiert, und diese Tangente ist folglich die Spur der Schmiegungsebene des gegebenen Bogens in O. Die Halbstrahlen $O'N'$ und $O'M'$ konvergieren nach entgegengesetzt gerichteten Grenzlagen, und da M und N auf entgegengesetzten Seiten der Schmiegungsebene in O liegen, liegen M' und N' auf derselben Seite der Tangente in O'. Der Bogen $M'O'N'$ ist also in der Umgebung von O' ein einfacher Bogen.

267. Den unendlich fernen Punkten haben wir bis jetzt noch keine besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Sie können bei den betrachteten Kurven ja nur in endlicher Anzahl vorkommen, und jeder von ihnen kann mit Hilfe einer perspektivischen Raumtransformation untersucht werden. Da die Definitionen, welche unendlich ferne Punkte betreffen, beständig so getroffen werden, daß man sie durch Anwendung einer perspektivischen Transformation auf gewöhnliche Punkte zurückführt, bieten sie auch hier keinerlei Schwierigkeiten dar.

Krümmungskreis.

268. Der Schmiegungskreis für eine Raumkurve wird ebenso definiert wie für ebene Kurven. Er liegt in der Schmiegungsebene, und sein Mittelpunkt gehört der Normalen an, die in der Schmiegungsebene enthalten ist. Diese Normale heißt die *Hauptnormale*. Faßt man eine ebene Kurve als eine spezielle Raumkurve auf, so ist die Ebene der Kurve als Schmiegungsebene aufzufassen und die Kurvennormalen, die in der Ebene liegen, als Hauptnormalen.

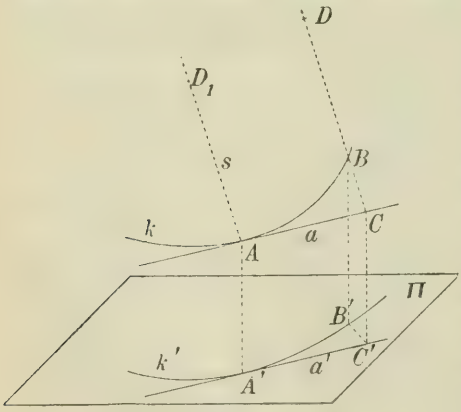


Fig. 238.

Der Schmiegungskreis wird auch Krümmungskreis genannt, und sein Radius gewöhnlich als Krümmungsradius bezeichnet.

In Fig. 238 ist A ein fester, B ein beweglicher Punkt auf der Kurve k. Ein Kreis, der die Tangente a in A berührt und durch B geht, möge die Linie BC (wobei C ein willkürlicher Punkt auf a ist) in D schneiden. Man findet dann durch genau ebensolche Betrachtungen, wie sie bei den ebenen Kurven angestellt worden sind,

$$CD = \frac{AC^2}{BC}.$$

Wenn nun B sich A und BC sich einer bestimmten Grenzlage s nähert, so nähert sich der veränderliche Kreis dem Krümmungskreis und dieser muß dann s in einem Punkte D_1 schneiden, der durch die Beziehung bestimmt ist

$$AD_1 = \lim \frac{AC^2}{BC}.$$

Ist BC beständig senkrecht auf a oder jedenfalls die Grenzlage von $BC \perp a$, so wird s die Hauptnormale in A und AD_1 ein Durchmesser des Krümmungskreises. Zur Bestimmung des Krümmungsradius ϱ hat man dann die Gleichung:

$$2\varrho = \lim \frac{AC^2}{BC}.$$

Durch senkrechte Projektion auf eine Ebene $\Pi \parallel a$ erhält man nun einen Bogen k', dessen Krümmungsradius ϱ_1 durch die Gleichung bestimmt ist:

$$2\varrho_1 = \lim \frac{A'C'^2}{B'C'};$$

aber da $A'C' = AC$ und $\lim \frac{B'C'}{BC} = \cos\alpha$, wenn α die Neigung der Hauptnormalen oder auch der Schmiegungsebene gegen die Ebene Π ist, so findet man

$$\text{(I)} \qquad \frac{\varrho}{\varrho_1} = \cos\alpha.$$

Projiziert man hingegen k auf eine Ebene, die parallel zur Hauptnormalen ist und einen Winkel β ($\neq 90^0$) mit der Tangente bildet, so erhält man $\lim \frac{BC}{B'C'} = 1$, während $\lim \frac{A'C'}{AC} = \cos\beta$ ist, mithin wird

$$\text{(II)} \qquad \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{1}{\cos^2\beta}.$$

269. Als ein wichtiges Beispiel für die Konstruktion des Krümmungskreises und der Schmiegungsebene einer Raumkurve in besonderen Punkten nehmen wir das folgende: Wir betrachten *die Durchdringungskurve zweier Umdrehungsflächen, deren Achsen a und b in der Zeichenebene liegen* und deren Meridiankurven *m* und *n* sind (Fig. 239). Man kann die Punkte der Durchdringungskurve mit Hilfe von Kugeln bestimmen, deren Mittelpunkt in dem Schnittpunkte S der Achsen liegt, wobei jede dieser Kugeln die Umdrehungsflächen in Parallelkreisen schneidet, die ihrerseits Punkte der gesuchten Durchdringungskurve gemein haben. Die Tangente der Durchdringungskurve in einem der gefundenen Punkte steht senkrecht auf der Ebene, die durch die Normalen der beiden Flächen in dem Punkte bestimmt wird. Die Schnittkurve wird von der Zeichenebene in zwei symmetrische Hälften geteilt, und von ihr liegen bei Fig. 239 zwei Punkte P und P_1 in der Zeichenebene. In diesen Punkten (den Scheitelpunkten der Kurve) steht die Tangente senkrecht auf der Zeichenebene, es ist deshalb von Wichtigkeit, die Schmiegungsebene in diesen Punkten zu finden, da die Spuren der Schmiegungsebene die Projektion der Durchdringungskurve berühren. Wir betrachten den Punkt P und einen benachbarten Punkt P^* auf der Kurve. Zwei Kugeln, die gleichzeitig durch P und P^* gehen, und deren Mittelpunkte beziehungsweise auf a und b liegen, schneiden einander in einem Kreise, der die Raumkurve in P berührt und durch P^* geht. Dieser Kreis nähert sich, wenn P^* nach P konvergiert, dem Krümmungskreise in P. Aber bei diesem Grenzübergange konvergieren die Kugeln nach Kugeln, welche die Umdrehungsfläche längs der durch P gehenden Parallelkreise berühren. Die Radien dieser letzten Kugeln sind die Normalen PQ und PR der beiden Meridiankurven, und der gesuchte Krümmungskreis wird der Schnittkreis dieser Kugeln.

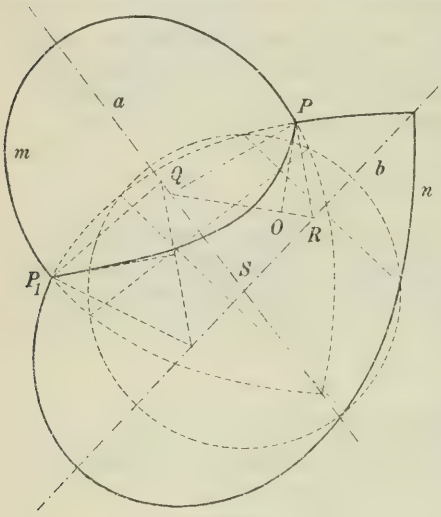


Fig. 239.

Das von P auf die Linie QR gefällte Lot PO bestimmt den Krümmungsmittelpunkt O. Die Linie PO ist zugleich die Spur der Schmiegungsebene und berührt deshalb die Projektion der Schnittkurve auf die Zeichenebene.

Sucht man die Projektion der Kurve auf eine beliebige zur Zeichenebene senkrechte Ebene, so kann der Krümmungsradius der Projektionskurve in einem P entsprechenden Punkte unmittelbar aus der Formel (I) auf S. 231 gefunden werden.

270. Die Länge des Bogens im Raume wird ähnlich wie bei den ebenen Kurven definiert. Das Verhältnis zwischen dem Bogen und der Sehne nähert sich der Einheit, wenn der Bogen sich der Null nähert.

Wenn ein einfacher Bogen in jedem Punkte einen bestimmten mit dem Punkte stetig veränderlichen Krümmungsradius hat, so läßt sich zeigen, daß der Krümmungsradius der Grenzwert ist für das Verhältnis zwischen der Bogenlänge, wenn diese gegen Null konvergiert, und dem Kontingenzwinkel (d. h. dem von den beiden Tangenten in den Endpunkten des Bogens gebildeten spitzen Winkel). Auf den Beweis gehen wir aber nicht ein.

Elftes Kapitel.

Abwickelbare Flächen und andere Hüllflächen.

Allgemeine abwickelbare Flächen.

271. Wir betrachten ein geordnetes System von Ebenen, das wir uns durch die Bewegung einer Ebene erzeugt denken, und setzen dabei voraus, daß niemals die Ebene beim Übergang aus einer Stellung in eine andere beständig durch dieselbe Linie geht. Unter der Schnittlinie einer Ebene Π des Systems mit der konsekutiven Ebene verstehen wir die Grenzlage für die Schnittlinie zwischen Π und einer veränderlichen Ebene, die sich Π nähert, indem sie eine geordnete Reihe von Lagen durchläuft, die zu dem gegebenen System gehören. Die Gesamtheit der Schnittlinien aller Ebenen mit ihren konsekutiven Ebenen bilden eine Fläche, welche die *Hüllfläche* des Systems heißt. Die Fläche heißt *abwickelbar*, und die genannten geraden Linien heißen ihre *Erzeugenden*. Wenn alle Ebenen in dem gegebenen System durch einen Punkt A gehen, so gehen auch alle Erzeugenden durch diesen Punkt, und die Fläche wird eine Kegelfläche. Als Leitkurve für diese Fläche kann man die Hüllkurve für die Schnittlinie der gegebenen Ebene mit einer festen Ebene, die nicht durch A geht, benutzen. Die Kegelfläche wird von allen Ebenen des gegebenen Systems berührt. Ist A unendlich fern, so wird die Fläche eine Zylinderfläche. Im folgenden lassen wir Kegel und Zylinder außer Betracht, indem wir voraussetzen, daß die veränderliche Ebene, die das gegebene System durchläuft, niemals beim Übergang aus einer Lage in eine andere durch denselben Punkt geht.

Schneidet man das gegebene System mit zwei Parallelebenen Γ und Δ, von denen keine zum System gehört (Fig. 240), so umhüllen die Spuren c und d der beweglichen Ebene Π des Systems in Γ und Δ zwei Kurven i und k, die als Normkurven (183) vorausgesetzt werden sollen. Ebenso setzen wir voraus, daß die Spur der beweglichen Ebene in jede andere zu Γ und Δ parallele

Ebene eine Normkurve erzeugt. c und d mögen die beiden Kurven i und k in C und D berühren, eine neue Lage Π_1 der beweglichen Ebene Π möge die Spuren c_1 und d_1 mit den Berührungspunkten C_1 und D_1 liefern. c und c_1 mögen sich in γ, d und d_1 in δ schneiden. Wenn Π_1 sich Π nähert, so nähert ihre Schnittlinie mit dieser Ebene sich CD, indem γ sich C und δ sich D nähert. Die Linie CD ist deshalb eine Erzeugende der Fläche. *Jede Erzeugende der Fläche ist mithin die Verbindungslinie zweier Punkte auf den Kurven i und k, deren Tangenten parallel sind.* Man erkennt zugleich, daß alle ebenen Schnitte der Fläche, die zu Γ und Δ parallel sind, in den Punkten, die auf derselben Erzeugenden liegen, parallele Tangenten haben.

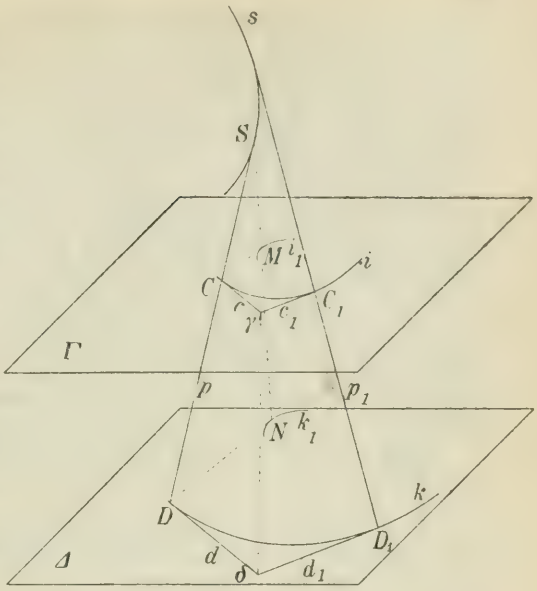


Fig. 240.

Jede Ebene Π *des gegebenen Systems berührt die Hüllfläche längs der zu* Π *gehörenden Erzeugenden* p.

Beweis: Wenn die Erzeugende p_1 sich p nähert (Fig. 240), so nähert sich die Ebene Cp_1 der Grenzlage cp; CC_1 nähert sich nämlich c und p_1 nähert sich p. Wenn nun eine beliebige Kurve, die auf der Fläche liegt und durch C geht, die bewegliche Erzeugende p_1 in P_1 schneidet, so wird die Grenzlage für die Linie CP_1 in der Ebene cp, also in Π enthalten sein, d. h. diese Ebene ist die Tangentialebene der Fläche im Punkte C. Auf dieselbe Weise erkennt man, daß die Ebene Π Tangentialebene in jedem Punkte von p ist. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche sind Tangenten einer bestimmten Raumkurve.

Beweis: In den Ebenen Γ und Δ zeichnen wir die Normalen CM und DN der Kurven i und k. Diese Normalen sind parallel.

Wenn p die gegebene Fläche durchläuft, so umhüllen CM und DN die Evoluten i_1 und k_1 der Kurven i und k, und die durch CM und DN bestimmte Ebene umhüllt eine neue abwickelbare Fläche, welche die Kurven i_1 und k_1 enthält. Eine Erzeugende MN der neuen Fläche schneide CD in einem Punkte S. Wenn p die gegebene Fläche und MN die neue Fläche durchläuft, so beschreibt der Punkt S eine Kurve s, die auf beiden Flächen liegt, und deren Tangente in S deshalb die Schnittlinie der Tangentialebenen beider Flächen längs CD und MN ist, aber diese Schnittlinie ist eben p, und somit ist p die Tangente der Kurve s in S.

Unsere Fläche ist also die Tangentenfläche einer bestimmten Raumkurve s (der *Spitzkante* der Fläche); für den Fall, wo s eine einfache Raumkurve ist, haben wir somit bereits früher (262 ff.) wesentliche Eigenschaften der Fläche gefunden, und auf diesen Fall werden wir uns auch im folgenden beschränken.

272. *Die Tangentialebenen der abwickelbaren Fläche sind Schmiegungsebenen der Kurve s.*

Beweis: Da p_1 eine Tangente von s ist, konvergiert die Ebene Sp_1, wenn p_1 sich p nähert, nach der Schmiegungsebene der Kurve in S, aber sie konvergiert auch nach der Tangentialebene der Fläche längs p (vgl. auch 262).

Daß die Tangenten einer beliebigen einfachen Raumkurve immer eine abwickelbare Fläche bilden, folgt aus dem früher bewiesenen Satz, daß die Grenzlage der Schnittlinie einer Schmiegungsebene mit einer benachbarten Schmiegungsebene eine Tangente der Kurve ist (260).

273. Der Richtungskegel der Spitzkante s heißt auch *Richtungskegel der abwickelbaren Fläche.* Die Erzeugenden des Richtungskegels sind mithin parallel zu den Erzeugenden der Fläche, und die Tangentialebenen des Richtungskegels sind parallel zu den Tangentialebenen der Fläche.

Der Richtungskegel bestimmt die unendlich fernen Punkte der Fläche. Doch kann die Fläche insbesondere eine oder mehrere unendlich ferne Erzeugende enthalten, und die derart bestimmten unendlich fernen Punkte der Fläche bilden eine Gesamtheit für sich, die nicht unter den durch den Richtungskegel bestimmten unendlich fernen Punkten enthalten ist.

Bei der Projektion der abwickelbaren Fläche ist in erster Linie die Projektion der Spitzkante von Bedeutung. Weiter kommen die Umrißerzeugenden, deren Tangentialebenen projizierende Ebenen sind, in Betracht. Handelt es sich um eine Parallelprojektion, so

sind diese Umrißerzeugenden parallel zu den Umrißerzeugenden des Richtungskegels.

Eine *Doppelkurve* der Fläche entsteht als der geometrische Ort der Punkte, von denen *zwei* Erzeugende ausgehen. Wenn zwei solche Erzeugende sich auf der Fläche bewegen, beschreibt nämlich jede von ihnen einen Teil der Fläche, und ihr Schnittpunkt eine Schnittkurve der beiden Flächenteile. In der Projektion der Fläche muß die Doppelkurve angegeben werden.

274. Wir wollen nun erklären, warum die im vorstehenden beschriebenen Flächen abwickelbare Flächen genannt werden. Zunächst betrachten wir eine Reihe dicht aufeinander folgende Lagen der Ebenen, die die Fläche umhüllen; $a, b, c, d, \ldots\ldots$ (Fig. 241) seien die Schnittlinien von je zwei aufeinanderfolgenden dieser Ebenen. Die so bestimmten schmalen Keile ab, bc, cd, $\ldots\ldots$ bilden eine Figur, die wir kurz als eine *Polygonfläche* bezeichnen wollen. Sie kann auf eine Ebene Γ abgewickelt werden, indem man diese erst mit ab zusammenfallen läßt, darauf bc durch eine kleine Drehung um b in die Ebene fallen läßt, darauf cd durch eine Drehung um c usw. Die Keile ab, bc, cd, $\ldots\ldots$ legen sich dann der Reihe nach in die Ebene um und bilden in ihr eine zusammenhängende Figur $abc'd'\ldots$, welche die Abwicklung der Polygonfläche heißt. Bei der Abwicklung der Polygonfläche beschreibt ein beliebiger Punkt P von ihr eine Kurve, die aus einer Reihe kleiner Kreisbögen besteht; der erste dieser Bogen entsteht durch die Drehung um b, seine Ebene ist senkrecht zu b. Der zweite Bogen entsteht durch die Drehung um c' und liegt deshalb in einer zu dieser Linie senkrechten Ebene usw.

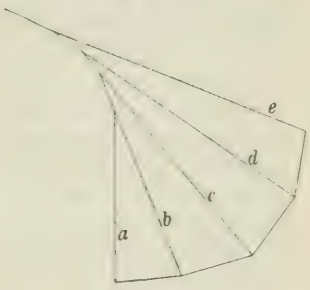


Fig. 241.

Wenn nun die Anzahl der Ebenen in der Polygonfläche ins unendliche wächst, indem die Keile ab, bc, ... schmäler und schmäler werden, nähert sich die Polygonfläche mehr und mehr der abwickelbaren Fläche, und diese wird immer die genannte Eigenschaft behalten, daß sie auf einer Ebene rollen und derart auf diese abgewickelt werden kann. So erkennt man, daß auch die Fläche selbst auf der Ebene rollen und derart auf diese abgewickelt werden kann, d. h. die Fläche kann sich so bewegen, daß sie beständig die Ebene längs einer Erzeugenden berührt und alle Punkte auf der

Fläche im Verlauf der Bewegung in die Ebene übergehen, derart, daß

1. *jeder Punkt A der Fläche in einen entsprechenden Punkt A′ der Ebene fällt,*

2. *zu jeder Kurve k auf der Fläche eine entsprechende Kurve k′ in der Ebene gehört und entsprechende Bögen dieser Kurven gleiche Längen haben,*

3. *die Winkel zwischen zwei Kurven auf der Fläche gleich den Winkeln zwischen den entsprechenden Kurven in der Ebene werden und insbesondere die Winkel, unter denen eine Kurve die Erzeugenden schneidet, unverändert bleiben.*

Bei der Abwicklung beschreibt ein beliebiger Punkt P der abwickelbaren Fläche eine Raumkurve, von der die Normalebene in jedem Augenblick durch die Erzeugende hindurchgeht, bis zu welcher die Abwicklung gerade fortgeschritten ist, so daß die Kurve die Ebene Γ selbst unter einem rechten Winkel trifft.

Durch die Betrachtung der Polygonfläche und der zu ihr gehörenden Richtungspyramide erkennt man, daß die Abwicklung der Fläche und die Abwicklung ihres Richtungskegels so eingerichtet werden können, daß entsprechende Erzeugende bei der Abwicklung parallel bleiben.

275. *Zwischen den Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 in entsprechenden Punkten einer Kurve k auf einer abwickelbaren Fläche und der entsprechenden Kurve k′ in der ebenen Abwicklung der Fläche besteht folgende einfache Beziehung:*

$$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\cos\alpha},$$

wenn α den Winkel zwischen der Tangentialebene der Fläche und der Schmiegungsebene der Kurve in dem betrachteten Punkt bezeichnet.

Beweis: Die Fläche berühre die Ebene Γ längs der Erzeugenden p, die einen Punkt A der gegebenen Kurve k enthält (Fig. 242), ein anderer Punkt der Kurve sei B. Wenn die Fläche auf der Ebene rollt, gelangt B nach B' und der Bogen AB wird in den Bogen AB' abgewickelt. Der von B beschriebene Bogen BB' trifft Γ

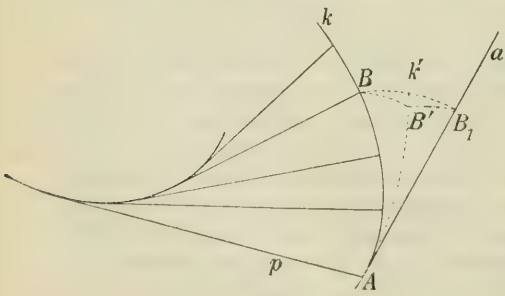


Fig. 242.

unter einem rechten Winkel. Wir tragen nun auf der Tangente a in A $AB_1 = \widehat{AB} = \widehat{AB'}$ ab, und zeichnen die Bahnen BB_1 und $B'B_1$ bei der Abwicklung von k und k'. Wenn B sich A nähert, werden die Seiten in dem krummlinigen Dreieck $B_1B'B$ unendlich klein, während der krummlinige Winkel BB_1B' den konstanten Wert α hat; die durch a und die Tangente des Bogens BB_1 in B_1 bestimmte Ebene ist nämlich die Schmiegungsebene der Kurve k in A. Da gleichzeitig der Winkel $BB'B_1$ in dem krummlinigen Dreieck beständig 90^0 beträgt, hat man

$$\lim \frac{B'B_1}{BB_1} = \cos\alpha,$$

aber da $2\varrho = \lim \frac{AB_1^2}{BB_1}$ und $2\varrho_1 = \lim \frac{AB_1^2}{B'B_1}$ wird, finden wir

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \lim \frac{BB_1}{B'B_1} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

w. z. b. w. Ist $\alpha = 0$, so hat man $\varrho_1 = \varrho$, woraus man erkennt, daß die Abwicklung der Spitzkante denselben Radius besitzt wie die Spitzkante selbst.

Daraus, daß das krummlinige Dreieck BB_1B' den spitzen Winkel α enthält, geht gleichzeitig hervor, daß die konkave Seite von k' eben da liegt, wo die konkave Seite der Projektion von k auf die Tangentialebene liegt. Weiter erkennt man, daß, wenn die Kurve k einen Punkt A enthält, für den $\alpha = 90^0$ wird, die Möglichkeit besteht, daß der A entsprechende Punkt von k' ein Wendepunkt wird. Die Bedingung dafür ist, daß α, während der Punkt auf der Kurve k die Stelle A passiert, entweder beständig wächst oder beständig abnimmt. *Wenn der Winkel zwischen der Schmiegungsebene und der Tangentialebene für jeden Punkt von k ein rechter wird, wird k in eine gerade Linie ausgebreitet.* Die Kurve k ist dann *eine geodätische Kurve* (kürzester Weg) auf der Fläche.

Kegelflächen.

276. Der Mantel eines Rotationskegels wickelt sich als ein Kreisausschnitt ab. Da der Umfang des Grundkreises dieselbe Länge wie der Bogen des Ausschnitts hat, wird die Gradzahl dieses Bogens $= 360^0 \cdot \sin u$, wo u den Achsenwinkel des Kegels bezeichnet. In Fig. 243a ist $u = 30^0$. Die Abwicklung des Mantels wird dann ein Halbkreis. Ein hyperbolischer Schnitt des Kegels,

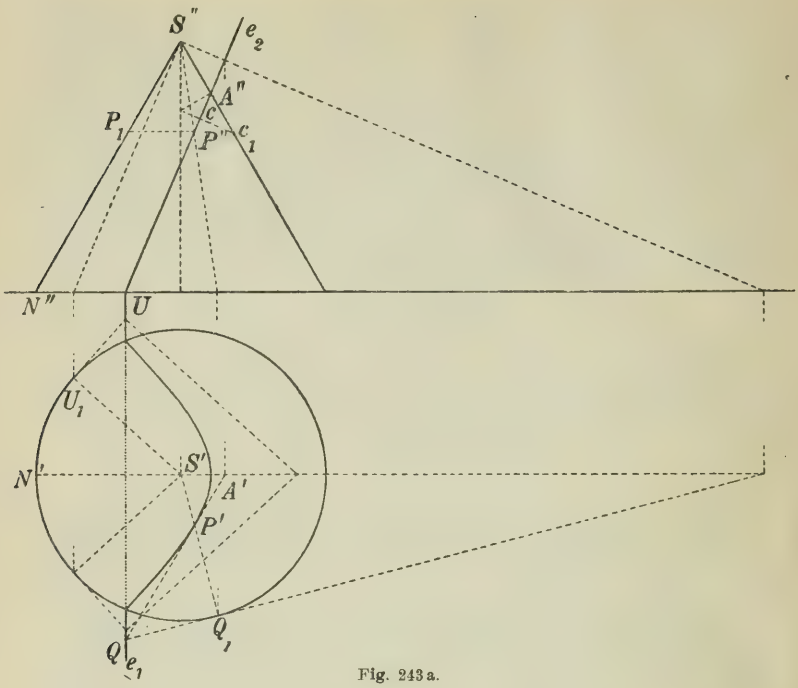


Fig. 243a.

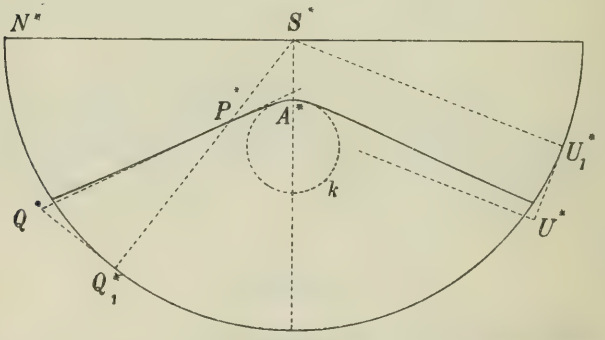


Fig. 243b.

der durch eine Ebene $e_1 e_2$ senkrecht zur Aufrißebene erzeugt wird, wird abgewickelt, indem man den Kegel längs der Erzeugenden SN aufschneidet (Fig. 243a, b). Der Scheitelpunkt A des Hyperbelastes fällt nach A^*, wobei $S^*A^* = S''A''$ wird. Der Krümmungs-

kreis k der abgewickelten Kurve in A^* hat den Radius $A''c_1 = A''c : \cos\alpha$ (275). $A''c$ ist nämlich der Krümmungsradius der Hyperbel im Punkte A, den wir nach 212 bestimmen. Der Wendepunkt P^* der abgewickelten Kurve entspricht einem Punkte P der Hyperbel, in welchem die Tangentialebene des Kegels auf der Ebene der Hyperbel senkrecht steht (275). Man findet also P, wenn man durch das aus S auf die Ebene der Hyperbel gefällte Lot eine Tangentialebene an den Kegel legt und den Schnittpunkt der Berührungslinie SQ_1 mit der Schnittebene sucht. Es ergeben sich zwei Lösungen, von denen aber nur die eine in der Figur angegeben ist. Den Q_1 bei der Abwicklung entsprechenden Punkt Q^*_1 findet man, indem man von N^* aus einen Bogen abträgt, der gleich dem Bogen NQ_1 wird. Macht man darauf S^*P^* gleich der wahren Länge $S''P_1$ von SP, so erhält man den gesuchten Punkt P^*. Die Tangente der Hyperbel in P hat eine Grundrißspur Q, die auf e_1 liegt, und da die Lage der Tangente zur Seitenlinie bei der Abwicklung erhalten bleibt, so kann man die Tangente in P^* finden, indem man $Q^*_1Q^* = Q_1Q$ auf der Tangente des abgewickelten Grundkreises abträgt, Q^*P^* ist dann die gesuchte Tangente. Man sieht leicht, daß die früher angegebene Bedingung (275) dafür, daß die gefundene Tangente wirklich eine Wendetangente wird, hier erfüllt ist.

Wir erkennen zugleich, wie man einen beliebigen Punkt der abgewickelten Kurve samt seiner Tangente finden kann. Die Methode läßt sich auch auf unendlich ferne Punkte anwenden. In der Figur ist noch die eine Asymptote konstruiert, indem der Kegel mit einer zu der Ebene der Hyperbel parallelen Ebene durch die Spitze geschnitten wurde.

277. Die *Durchdringungskurve zweier Kegel* kann man dadurch konstruieren, daß man durch die Verbindungslinie der Spitzen Hilfsebenen legt, die beide Kegelflächen schneiden. Jede dieser Ebenen schneidet dann jede Kegelfläche in einer oder mehreren Seitenlinien, und diese Seitenlinien treffen einander in Punkten der gesuchten Kurve. In Fig. 244a sind a und b die Spuren der Kegel in der Bildebene, A und B die Kegelspitzen, AB hat die Spur S. Eine Linie durch S, die a und b schneidet, ist die Spur einer der genannten Hilfsebenen. Einer der gesuchten Punkte in dieser Hilfsebene ist P, nämlich der Schnittpunkt von AP_1 und BP_2. Die Tangente in P wird gefunden, indem man P mit dem Schnittpunkt T der Tangenten an die Spurkurven in P_1 und P_2 verbindet.

Eine der Hilfsebenen durch AB berührt den Kegel $A(a)$

längs AQ_1 und schneidet den Kegel $B(b)$ in zwei Seitenlinien. In dieser Hilfsebene erhält man also nur zwei Punkte der Schnittkurve, während man sonst vier erhält. Die Tangenten dieser zwei Punkte sind die Seitenlinien, in denen die Ebene den Kegel $B(b)$

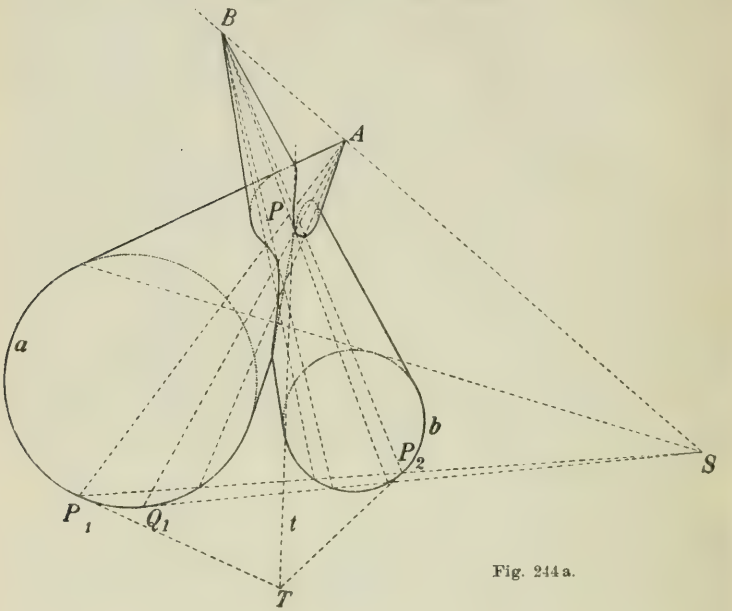


Fig. 244a.

schneidet, und die Schmiegungsebene der Kurve in den zwei Punkten sind die Tangentialebenen des Kegels längs der genannten Seitenlinien.

Die Hilfsebene $SABQ_1$ zerlegt den Kegel $B(b)$ in zwei Teile, von denen nur der eine für die Durchdringung in Betracht kommt; jede Seitenlinie dieses Teiles der Kegelfläche (mit Ausnahme der begrenzenden Seitenlinien) hat mit der anderen Fläche zwei Punkte gemein. Man erkennt so, daß die Durchdringung aus einer einzigen geschlossenen Kurve besteht.

In Fig. 244b ist eine andere Orientierung dargestellt, bei der man von S zwei Tangenten an a ziehen kann, die b schneiden, so daß von der Kegelfläche $B(b)$ zwei Stücke abgetrennt werden, die an der Durchdringung mit dem anderen Kegel nicht teilnehmen, während von den übrigen beiden Stücken jedes von dem Kegel $A(a)$ in einer geschlossenen Kurve durchdrungen wird. Die

Durchdringungskurve besteht also in diesem Falle aus zwei verschiedenen geschlossenen Zweigen.

278. Wenn die Kegelflächen von der zweiten Ordnung sind, hat die Durchdringungskurve höchstens vier Punkte mit einer beliebigen Ebene Π gemein; dies folgt daraus, daß die beiden Kegel-

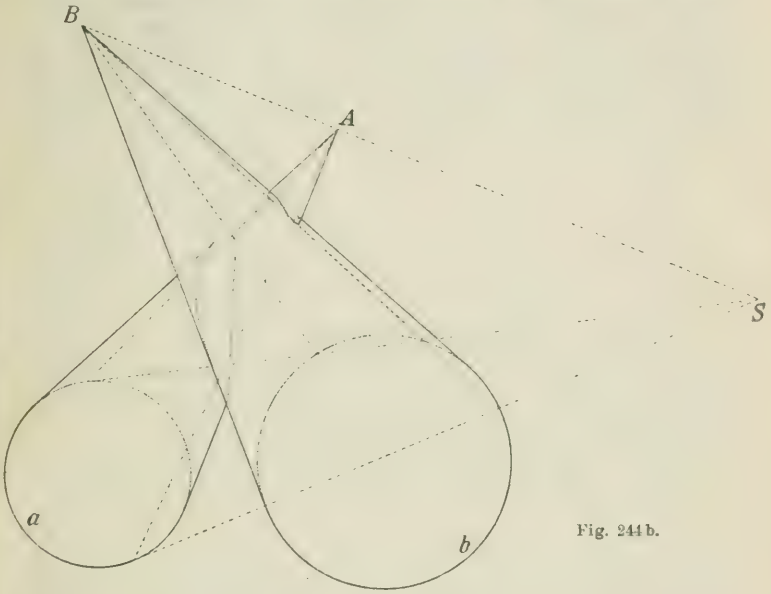


Fig. 241b.

schnitte, in denen die Ebene die Kegel schneidet, höchstens vier Punkte miteinander gemein haben (wenn sie nicht ganz zusammenfallen, in welchem Falle die Kegel einander in zwei Kegelschnitten durchdringen). Die Projektion der Schnittkurve auf eine beliebige Ebene hat deshalb auch höchstens vier Punkte mit einer geraden Linie gemein.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem werden die Flächen durch zwei Gleichungen zweiten Grades dargestellt, welche Gleichungen die Raumkurve bestimmen. Wenn eine der Koordinatenebenen, z. B. die xy-Ebene eine Symmetrieebene beider Flächen ist, werden die Gleichungen in z rein quadratisch, und die Projektion der Schnittkurve auf die xy-Ebene wird durch eine Gleichung zweiten Grades in x und y dargestellt, sie ist also ein Kegelschnitt, ein Fall, der in der Praxis häufig vorkommt.

Durch eine perspektivische Raumtransformation kann man

das gefundene Resultat leicht dahin erweitern, daß die Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung, die für einen Punkt O eine gemeinsame Polarebene besitzen, aus O durch einen Kegel zweiter Ordnung projiziert wird.

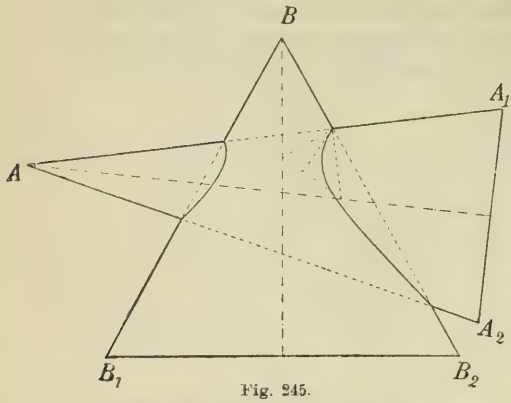


Fig. 245.

In der Fig. 245 ist z. B. die senkrechte Projektion zweier Rotationskegel gezeichnet, deren Achsen in der Zeichenebene liegen; die Spitzen sind A und B, und die Grundflächen werden in die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 projiziert. Die Projektion der Schnittkurve ist ein Kegelschnitt, von dem man sofort vier Punkte kennt. Die Tangenten in diesen Punkten konstruiert man am leichtesten mit Hilfe der früher angegebenen Methode für die Schnittkurve zweier Umdrehungsflächen (269).

279. Wenn die Spitze des einen Kegels $A(a)$ auf dem anderen Kegel liegt, aber die Kegel keine Seitenlinie gemein haben, so

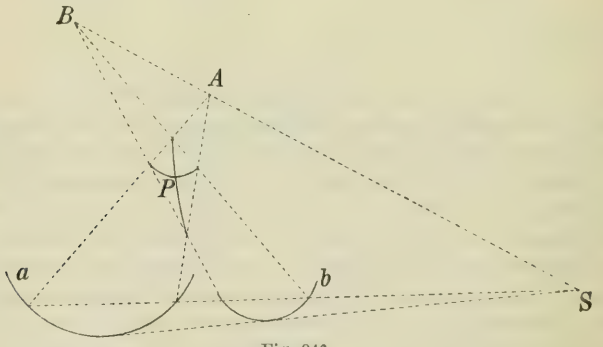


Fig. 246.

erhält die Schnittkurve in A entweder einen isolierten Punkt oder einen Doppelpunkt. Die Tangenten in dem Doppelpunkt sind die Schnittlinien des Kegels $A(a)$ mit der Tangentialebene des anderen Kegels in A.

Haben die beiden Kegel eine gemeinsame Tangentialebene mit verschiedenen Berührungslinien, so schneiden diese Berührungslinien einander in einem Punkte P, der für die Schnittkurve im allgemeinen ein Doppelpunkt wird (Fig. 246). Wir wollen nun zeigen, wie man die Tangenten in einem solchen Doppelpunkt P finden kann, indem wir vorläufig voraussetzen, daß a und b Kreise sind. In diesem Fall kann man beweisen, daß die Zentralprojektion der Schnittkurve aus P auf die Zeichenebene ein Kreis wird, der dem durch a und b bestimmten Kreisbüschel angehört. Indem wir die Spur der Verbindungslinie AB der Kegelspitzen beständig mit S bezeichnen und annehmen (Fig. 247), eine willkürliche

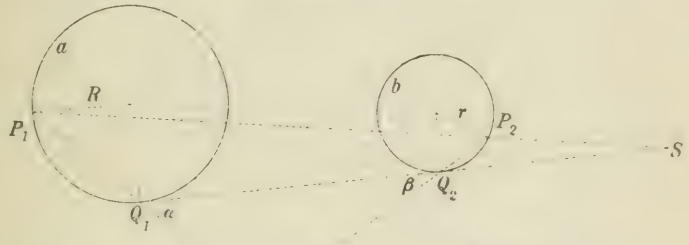


Fig. 247.

Linie durch S schneide a und b in P_1 und P_2, während Q_1, Q_2 die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangente seien, so gehen P_1Q_1 und P_2Q_2 durch eine Zentralprojektion mit dem Zentrum P aus den beiden Seitenlinien AP_1 und BP_2 hervor und ihr Schnittpunkt M ist ein Punkt auf der Zentralprojektion der Schnittkurve. Wir müssen nun zeigen, daß der geometrische Ort für M ein Kreis ist. Aus der Figur erhält man nach dem Satz des Menelaos, den man auf das von P_1P_2 geschnittene Dreieck MQ_1Q_2 anwendet:

$$\frac{MP_1}{MP_2} = \frac{Q_2S}{Q_1S} \cdot \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2},$$

und da gleichzeitig

$$\frac{MQ_1}{MQ_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

wird, findet man

$$\frac{MP_1 \cdot MQ_1}{MP_2 \cdot MQ_2} = \frac{Q_2S}{Q_1S} \cdot \frac{P_1Q_1}{\sin\alpha} : \frac{P_2Q_2}{\sin\beta} = \frac{Q_2S}{Q_1S} \cdot \frac{R}{r}.$$

Da die letzte Größe konstant ist, ist bewiesen, daß die Potenzen des Punktes M für die beiden Kreise ein konstantes Verhältnis haben. Der geometrische Ort für M ist also ein Kreis k, der zu dem durch a und b bestimmten Büschel gehört. Die Punkte des neuen Kreises kann man konstruieren, indem man durch S verschiedene Hilfslinien zieht. Zieht man z. B. die Tangente SR an a (Fig. 248), so gelangt man zu den Punkten M und N mit den Tangenten Q_2M und Q_2N, wodurch k vollständig bestimmt ist.

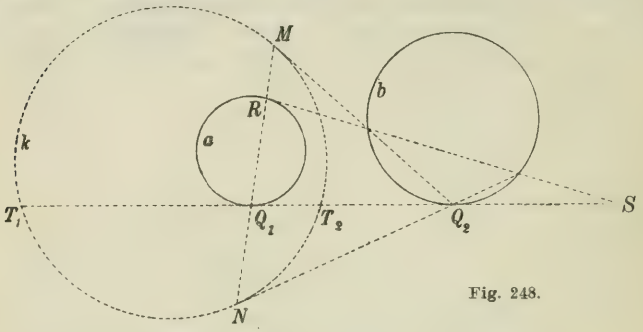


Fig. 248.

Die Spuren der gesuchten Doppelpunktstangenten sind die Punkte T_1 und T_2, in denen k die Verbindungslinie Q_1Q_2 schneidet. Aus der Figur geht hervor, daß T_1 und T_2 mit Q_1 und Q_2 harmonisch verbunden sind, Q_1 liegt nämlich auf der Polaren von Q_2 in bezug auf k. Gleichzeitig erkennt man, daß die Spuren der beiden Schmiegungsebenen im Doppelpunkt die Tangenten von k in T_1 und T_2 sind.

Wenn die Spuren der Kegel keine Kreise sind, so geht aus ganz ähnlichen Überlegungen hervor, daß man sie durch die Krümmungskreise ersetzen und darauf die vorstehende Konstruktion anwenden kann. Die Schmiegungsebenen können jedoch nicht auf diese Weise erhalten werden.

280. Haben zwei Kegel in der Projektionsebene eine gemeinsame Spur a, so schneiden sie einander in einer neuen Kurve s. Kann man von S aus Tangenten an a ziehen (Fig. 249), so geht die neue Schnittkurve durch die Berührungspunkte P und Q dieser Tangenten. Die Tangenten von s in P und Q müssen AB in einem Punkt S_1 schneiden, der mit S bezüglich A und B harmonisch verbunden ist (279). Ist a ein Kegelschnitt, so wird auch s ein Kegelschnitt (251).

Haben zwei Kegel zweiter Ordnung mit verschiedenen Spitzen

zwei gemeinsame Tangentialebenen, so besteht ihre Schnittkurve, wenn sie überhaupt existiert, aus zwei Kegelschnitten (252).

Diesen Satz kann man auch benutzen, um einen ebenen Schnitt eines gegebenen Kegels zweiter Ordnung zu finden, dessen

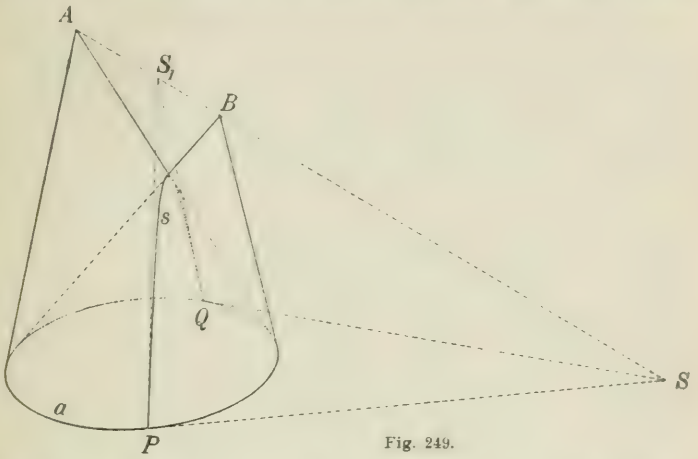


Fig. 249.

Projektion auf eine bestimmte Ebene ein Kreis wird. Man zeichnet einen Kreis, der die begrenzenden Seitenlinien der Projektion des gegebenen Kegels berührt und innerhalb dieser Projektion liegt, dann gibt es nach dem angeführten Satz zwei ebene Schnitte des Kegels, die in diesen Kreis projiziert werden. Wenn die Projektion des Kegels keine begrenzenden Seitenlinien aufweist, kann man indessen diese Betrachtung nicht anwenden.

281. Wenn zwei Kegel zweiter Ordnung keine gemeinsame Tangentialebene haben und die Spitze des einen Kegels nicht auf dem anderen liegt, so hat die Durchdringungskurve keinen Doppelpunkt. Trotzdem kann es auf der Projektion der Durchdringungspunkte Doppelpunkte geben, indem ein Projektionstrahl die Kurve in zwei Punkten schneiden kann. Fig. 250 hat man als Zentralprojektion oder Parallelprojektion von zwei Kegeln $A(a)$ und $B(b)$ zu deuten, deren Grundkurven a und b in derselben Ebene liegen. Wir wollen eine gemeinsame Sehne der beiden Kegel finden, die durch das Projektionszentrum O geht. Die Polarebenen Ap und Bq von O mögen einander in der Linie MN schneiden. N wird bestimmt mit Hilfe der Ebene ABq_1, welche die beiden Polarebenen in AQ und BN schneidet. Die projizierende Ebene durch MN schneidet die Kegelflächen in zwei Kegelschnitten, in bezug auf

welche MN die Polare von O ist. Da jeder dieser Kegelschnitte in einer perspektiven Kollineation mit dem Zentrum O und der Kollineationsachse MN sich selbst entspricht, liegen ihre Schnittpunkte paarweise auf Geraden durch O. Die Projektion der Durch-

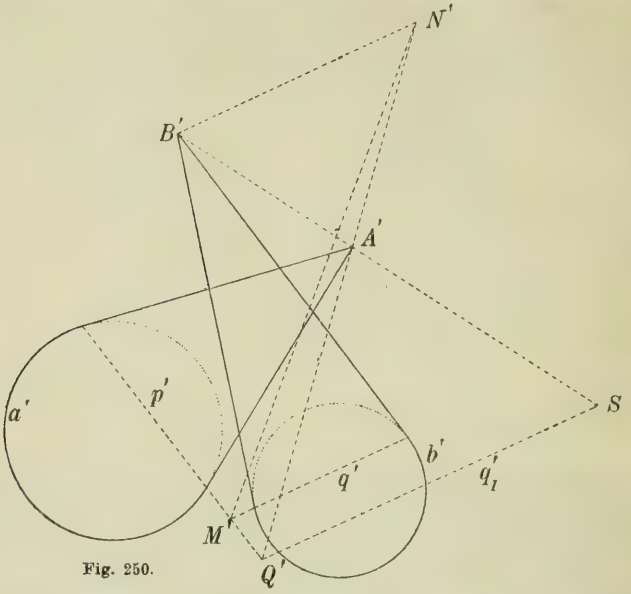


Fig. 250.

dringungskurve beider Kegel enthält also höchstens zwei Doppelpunkte, die auf der Linie $M'N'$ liegen müssen.

282. In dem Falle, wo die Polarebenen Ap und Bq des Punktes O zusammenfallen, werden die Punkte der Raumkurve paarweise in denselben Punkt projiziert: der projizierende Kegel mit der Spitze O wird dann, wie wir in 278 gesehen haben, von der zweiten Ordnung.

Um die Punkte zu finden, deren Polarebenen bezüglich der beiden Kegel zusammenfallen, benutzt man, daß eine solche Polarebene durch A und B, also durch die Linie AB gehen muß. O muß deshalb auf der Schnittlinie s der Polarebenen des Punktes S liegen. Sucht man auf s ein Punktepaar, das bezüglich der beiden Kegel konjugiert ist, so erhält man die gesuchten Punkte O. Wenn die Schnittkurve zweier Kegel $A(a)$ und $B(b)$ zweiter Ordnung keinen Doppelpunkt hat und nicht aus zwei Kegelschnitten besteht, findet man außer A und B höchstens zwei Punkte, aus

denen die Schnittkurve durch Kegel zweiter Ordnung projiziert wird.

Bei Fig. 244b kann man zwei Punkte von der genannten Beschaffenheit finden, so daß die Raumkurve im ganzen auf vier Kegeln zweiter Ordnung liegt. Bei Fig. 244a existieren die Punkte O hingegen nicht.

283. Unendlich ferne Punkte auf der Durchdringungskurve zweier Kegel entstehen als Schnitt paralleler Seitenlinien. Um solche Seitenlinien zu finden, verschiebt man den einen Kegel parallel, so daß seine Spitze mit der des anderen Kegels zusammenfällt. Die gemeinsamen Seitenlinien beider Kegel liefern dann die gesuchten Richtungen.

Alles, was wir im Vorstehenden über Kegelflächen gesagt haben, kann man insbesondere auf Zylinderflächen anwenden, nur hinsichtlich der unendlich fernen Punkte bieten diese besondere Verhältnisse dar. Die Durchdringungskurve eines Kegels mit einem Zylinder, der keine unendlich ferne Seitenlinie enthält, kann nur dann einen unendlich fernen Punkt enthalten, wenn die Seitenlinien des Zylinders einer Seitenlinie e des Kegels parallel sind. Die unendlich ferne Spitze des Zylinders liegt in diesem Fall auf dem Kegel und wird entweder ein isolierter Punkt oder ein Doppelpunkt der Durchdringungskurve. Die Tangentialebene längs e schneidet den Zylinder in den Asymptoten der Schnittkurve. Hat der Zylinder eine unendlich ferne Seitenlinie, die den Kegel schneidet, so bestimmen die Schnittpunkte neue unendlich ferne Punkte auf der Durchdringungskurve.

Die Schnittkurve zweier Zylinder, die keine unendlich fernen Seitenlinien enthalten, kann keinen unendlich fernen Punkt enthalten, ausgenommen wenn die Seitenlinien der Zylinder parallel sind, in welchem Fall sich die Schnittkurve in lauter gerade Linien auflöst.

284. Die Durchdringungskurve einer Kegelfläche mit einer beliebigen anderen Fläche kann man bestimmen, indem man die verschiedenen Seitenlinien des Kegels mit der Fläche zum Schnitt bringt.

Soll man so die Durchdringung einer Kugel mit einem Kreiskegel, der auf der Grundrißebene aufsteht, finden, so handelt es sich bloß darum, die Schnittpunkte der Seitenlinien des Kegels mit der Kugel zu bestimmen. Dieses kann z. B. dadurch geschehen, daß man vertikale Hilfsebenen durch die Spitze S des Kegels legt, diese dann mit den in ihnen enthaltenen Seitenlinien des Kegels und dem Schnittkreise der Kugel in eine Frontebene herumdreht,

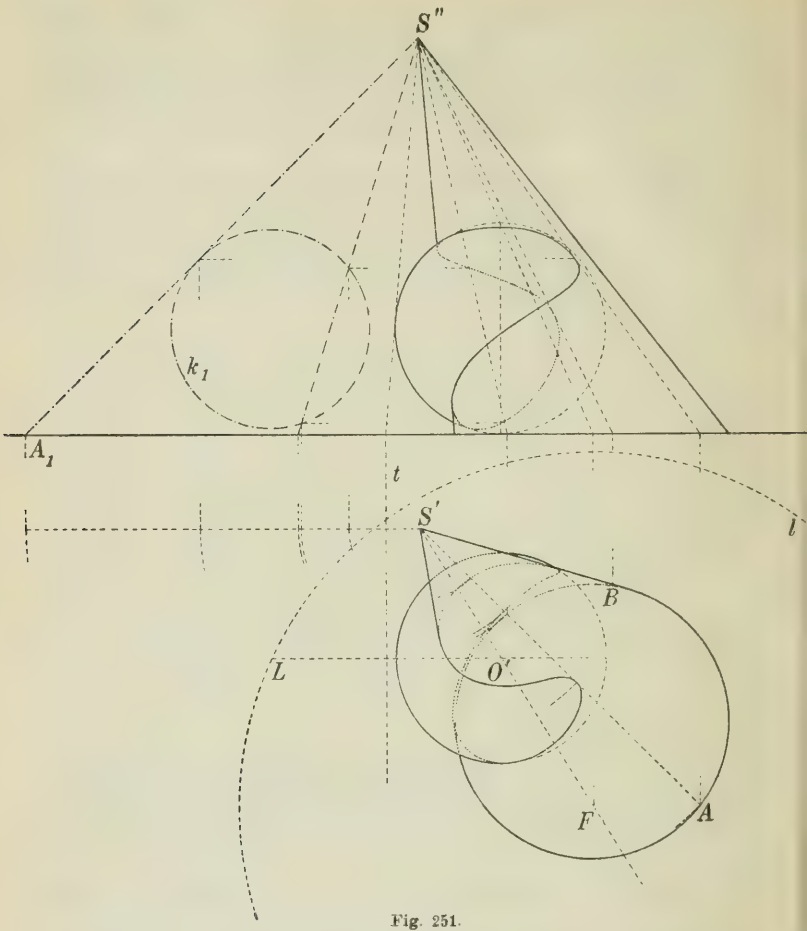


Fig. 251.

in der sich die Schnittpunkte sofort bestimmen lassen, und darauf in die ursprüngliche Lage zurückdreht.

Um zu ermitteln, welcher Teil des Kegels an der Durchdringung teilnimmt, legt man von S aus einen Tangentialkegel an die Kugel, dieser Kegel schneidet die Grundrißebene in einem Kegelschnitt (in Fig. 251 einer Ellipse), dessen Brennpunkte in den Projektionen der Endpunkte des vertikalen Kugeldurchmessers aus S liegen; jeder dieser Endpunkte ist nämlich Brenn-

punkt in einem horizontalen Schnitte des Tangentialkegels. Diese Brennpunkte sind in der Figur mit O' und F bezeichnet. Die Grundrißspur t einer zur Aufrißebene senkrechten Tangentialebene der Kugel, die durch S geht, berührt die Ellipse, und der zu O' bezüglich t symmetrische Punkt L liefert einen Punkt des Leitkreises l, dessen Mittelpunkt F ist. Hierauf findet man durch Probieren die Schnittpunkte A und B der Ellipse mit dem Grundkreise des Kegels (120). Die Seitenlinien SA und SB bilden dann die Grenze zwischen zwei Teilen des Kegels, einem Teile, der die Kugel schneidet, und einem Teile, der außerhalb der Kugel liegt. SA und SB sind selbst Tangenten der Kugel. In der Figur ist die vertikale Hilfsebene durch SA benutzt, um den Punkt der Durchdringung, der auf dieser Linie liegt, zu bestimmen. In diesem Punkte berührt SA die Durchdringungskurve.

Doppelpunkte auf der Projektion der Durchdringungskurve findet man durch ähnliche Betrachtungen, wie wir sie bei Kegelflächen angewendet haben. In der Aufrißprojektion erhalten wir Doppelpunkte, indem wir die Schnittlinie der Ebenen, welche die zur Aufrißebene senkrechten Sehnen des Kegels und der Kugel halbieren, bestimmen. Diese Schnittlinie ist horizontal, und den gesuchten Punkt gewinnen wir aus ihr, indem wir durch sie eine horizontale Ebene legen und die Schnittkreise des Kegels und der Kugel mit dieser Ebene bestimmen.

Während die Konstruktion des Doppelpunktes im Aufriß auf diese Weise recht einfach ist, wird sie für den Grundriß etwas schwieriger. Die Durchmesserebene, welche die vertikalen Sehnen halbiert, ist für die Kugel die Ebene des horizontalen größten Kreises, für den Kegel die Ebene, die durch die begrenzenden Seitenlinien in der Grundrißprojektion bestimmt wird. Die beiden Ebenen schneiden einander in einer horizontalen Linie, deren Grundrißprojektion p' sei. Auf dieser Linie muß der Doppelpunkt liegen. Seine Lage finden wir am einfachsten durch Probieren, indem wir uns durch die übrigen Punkte der Kurve eine vorläufige Vorstellung von ihrem Verlauf verschaffen und hierauf mit einem Punkt von p', den wir als den richtigen annehmen, die Probe machen, indem wir bloß die Punkte des Kegels bestimmen, die in diesen Punkt projiziert werden, und zusehen, ob sie symmetrisch bezüglich der Ebene des horizontalen größten Kreises liegen.

Die Punkte der Durchdringungskurve auf dem Umriß der Kugel finden wir im Grundriß unmittelbar, indem wir den horizontalen größten Kreis der Kugel mit dem in seiner Ebene liegen-

den Kreise des Kegels schneiden. Im Aufriß finden wir die Punkte auf dem Umriß der Kugel als die Schnittpunkte des Kegels mit dem zur Aufrißebene parallelen größten Kreise der Kugel. Man ermittelt sie am besten durch Probieren. Ihre Grundrißprojektion soll auf der durch O' parallel zur trennenden Achse gezogenen geraden Linie liegen. Die übrigen Punkte der Kurve in der Grundrißprojektion geben eine ungefähre Vorstellung von der Lage der Punkte, und man kann leicht so lange probieren, bis man die passenden Punkte gefunden hat.

Schraubenlinien und abwickelbare Schraubenflächen.

285. Jede Kurve, deren Richtungskegel ein Rotationskegel ist, heißt eine *Windellinie*; wenn sie keine Spitzen hat, ist sie nach 256 überall einfach. Die Fläche, die von den Tangenten der Kurve gebildet wird, heißt eine *Windelfläche*. Hat der Kegel eine vertikale Achse, so haben die Kurve und die Fläche konstante Neigung, indem die Tangenten der Kurve und die Tangentialebenen der Fläche mit einer horizontalen Ebene einen konstanten Winkel bilden. Der Zylinder, der die Windellinie enthält und dessen Seitenlinien der Achse des Richtungskegels parallel sind, heißt der *rektifizierende Zylinder* der Kurve. Seine Seitenlinien schneiden die Kurve unter konstantem Winkel (dem Achsenwinkel des Kegels). Breitet man die Zylinderfläche aus, so wird also die Kurve rektifiziert (daher der Name) und, wenn umgekehrt eine Ebene Π (Fig. 252) auf der Zylinderfläche rollt, und die in der Ebene Π enthaltene Tangente t sich dabei mit bewegt, so durchläuft t der Reihe nach alle Tangenten der Windellinie, woraus folgt, daß *die Spur der Windelfläche in einer zur Achse des Richtungskegels senkrechten Ebene eine Evolvente des in dieser Ebene liegenden Normalschnittes des Zylinders wird.* Die Schmiegungsebene der Windellinie ist beständig senkrecht auf der Tangentialebene des Zylinders.

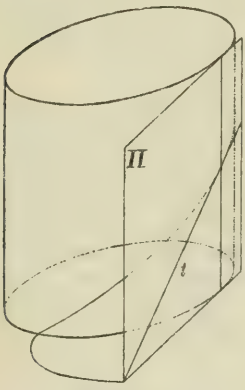


Fig. 252.

286. Ist der rektifizierende Zylinder ein Rotationszylinder, so heißt die Windellinie eine *Schraubenlinie*. Wickelt man eine Ebene

Π um einen Rotationszylinder herum, so legt sich jede zur Zylinderachse schräge gerade Linie dieser Ebene um den Zylinder als eine Schraubenlinie herum. Die Schraubenlinie kann deshalb durch eine *Schraubenbewegung* erzeugt werden, d. h. durch eine Bewegung, die sich aus einer Drehung um eine feste Achse (die *Schraubenachse*) und einer Verschiebung parallel zur Achse zusammensetzt, indem zwischen den Geschwindigkeiten dieser beiden Bewegungen ein konstantes Verhältnis vorausgesetzt wird. Der Teil der Schraubenlinie, der einer ganzen Umdrehung entspricht, heißt ein *Schraubengang*, die Verschiebung H längs der Achse, die zu einer ganzen Umdrehung gehört, heißt die *Ganghöhe*. Jeder Teil einer Schraubenlinie, der kleiner als ein Schraubengang ist, ist ein einfacher Bogen (256). Die Schraubenlinie schneidet jede Seitenlinie des rektifizierenden Zylinders in einer Reihe von Punkten, von denen zwei aufeinander folgende immer den Abstand H haben. Die von den Tangenten der Schraubenlinie gebildete Fläche heißt eine *abwickelbare Schraubenfläche*. Ihre Spur in einer beliebigen zur Schraubenachse senkrechten Ebene ist eine Kreisevolvente.

Je nachdem die Tangente und die Achse der Schraubenlinie in Rechts- oder Linksstellung sind, nennt man die Schraubenlinie *rechtsgängig* oder *linksgängig*. In Fig. 253 ist eine rechtsgängige Schraubenlinie mit vertikaler Achse dargestellt, deren Grundrißspur A und deren Grundrißprojektion der Kreis k ist. Indem man diesen Kreis z. B. in acht gleich große Teile teilt, wobei A der erste Teilungspunkt ist, findet man leicht auf jedem Schraubengang acht Punkte. Ein Punkt C, dessen Grundrißprojektion C' dem Punkt A diametral gegenüberliegt, liegt in der Höhe $\frac{1}{2}H$ über A. Die Tangente in ihm schneidet die Grundrißebene im Punkt C_1, der von C' um die Hälfte des Kreisumfanges entfernt ist. Die Tangenten in den übrigen Punkten findet man auf ähnliche Weise.

Den Richtungskegel legt man so, daß seine Grundrißspur k wird. Die Spitze S bestimmt sich dann dadurch, daß die eine frontale Seitenlinie SR des Kegels zu CC_1 parallel ist. Da die Dreiecke $S''A''R''$ und $C''A''C_1''$ ähnlich sind, findet man

$$\frac{S''A''}{A''R''} = \frac{C''A''}{A''C_1''} = \frac{\frac{1}{2}H}{\pi \cdot A''R''} \text{ also } S''A'' = \frac{H}{2\pi} = h.$$

Diese Größe h heißt die *reduzierte Ganghöhe* der Schraubenlinie.

Die Schmiegungsebene der Schraubenlinie im Punkt C ist parallel der Tangentialebene des Richtungskegels längs SR, also senkrecht auf der Aufrißebene. Die Normalebene in C ($\perp CC_1$) ist

ebenfalls auf der Aufrißebene senkrecht und dasselbe gilt von der Hauptnormalen in C. Man sieht so, daß alle Hauptnormalen die Schraubenachse unter rechten Winkeln schneiden. *Jede Hauptnormale ist eine Symmetrieachse für die Schraubenlinie.* Bei einer

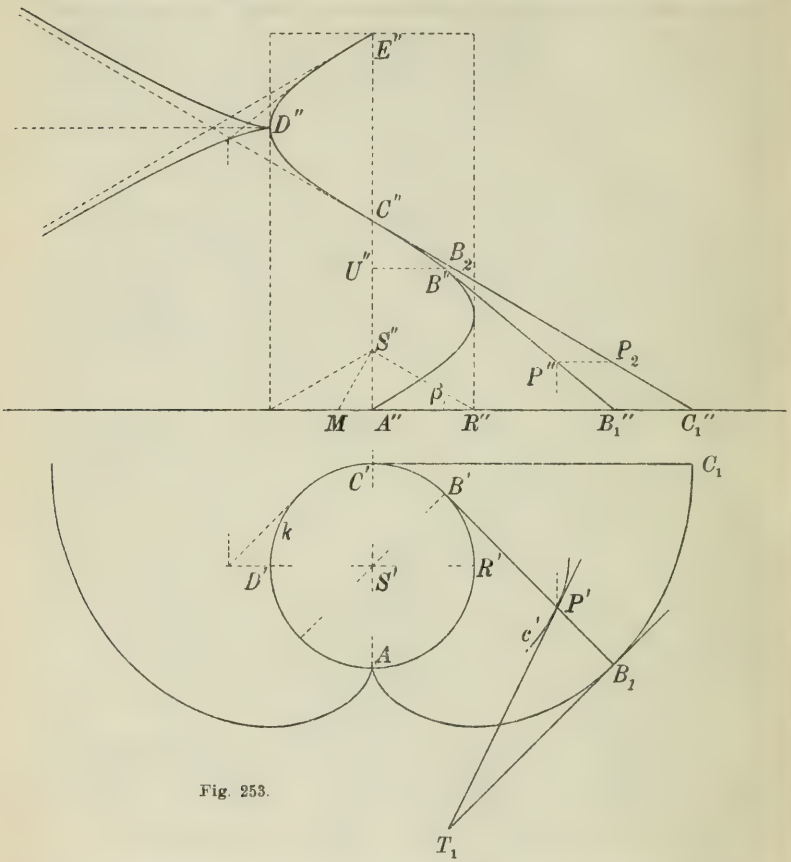


Fig. 253.

halben Umdrehung um die Hauptnormale in C bleiben nämlich die Punkte C und die Tangente CC_1 samt der Schraubenachse unverändert, so daß die Schraubenlinie nach dieser Drehung mit sich selbst zur Deckung kommt. Die Aufrißprojektion der Schraubenlinie ist also symmetrisch bezüglich C'' und hat an dieser Stelle einen Wendepunkt. Im Punkt D ist die Hauptnormale parallel zur Aufrißebene und die Aufrißprojektion der Kurve hat deshalb

in D'' einen Scheitelpunkt. Nehmen wir einen beliebigen Punkt B auf der Schraubenlinie an, für den im Grundriß der Bogen AB' gleich φ wird, so ergibt sich im Aufriß für die Projektion $B''l'''$ der Hauptnormale die Länge $x = a \sin \varphi$, wenn wir $A''R'' = a$ setzen, und es wird $A''U'' = z = h\varphi$, also ergibt sich

$$x = a \cdot \sin \frac{z}{h}.$$

Die Aufrißprojektion der Schraubenlinie ist also eine sogenannte *Sinuslinie.*

287. Da die Hauptnormale horizontal und die Grundrißprojektion der Schraubenlinie ein Kreis mit dem Radius $A''R''$ ist, können wir sofort den Krümmungsradius ϱ mit Hilfe der früher aufgestellten Beziehung (268) finden. Indem wir mit β den konstanten Richtungswinkel der Tangente bezeichnen, finden wir

$$\varrho = \frac{A''R''}{\cos^2 \beta}.$$

Ziehen wir $S''M \perp S''R''$, so wird

$$R''M = \frac{A''R''}{\cos^2 \beta},$$

und dies ist also die Länge des Krümmungsradius. Daß ϱ denselben Wert hat für alle Punkte der Schraubenlinie, weiß man ja von vornherein, da sich die Schraubenlinie bei der Schraubenbewegung in sich selbst verschiebt. Der geometrische Ort für den Krümmungsmittelpunkt wird eine neue Schraubenlinie von derselben Art wie die gegebene mit derselben Ganghöhe und mit einem Richtungskegel, dessen Seitenlinien zu den Seitenlinien des gegebenen Richtungskegels senkrecht sind. Zwischen den beiden Schraubenlinien besteht die merkwürdige Beziehung, daß die *ursprüngliche Schraubenlinie auch der geometrische Ort für die Krümmungsmittelpunkte der neuen Schraubenlinie ist.*

Für den Krümmungsradius ϱ_1 der Aufrißprojektion der Schraubenlinie im Punkte D'' findet man den Wert

$$\varrho_1 = \varrho \sin^2 \beta = A''R'' \operatorname{tg}^2 \beta = A''M.$$

288. Die abwickelbare Schraubenfläche wird von jeder horizontalen Ebene in einer Kreisevolvente geschnitten und kann deshalb erzeugt werden, indem man eine solche Evolvente um die Achse herumschraubt. Die Spitze der Evolvente durchläuft dabei die Spitzkante der Fläche, und jeder Doppelpunkt der Evolvente beschreibt eine Doppelkurve auf der Fläche. Da die Schrauben-

linie durch eine halbe Umdrehung um eine Hauptnormale mit sich selbst zur Drehung kommt, gilt dasselbe von der Schraubenfläche. Hieraus folgt:

1. Eine Ebene durch eine der Hauptnormalen schneidet die Fläche in einer Kurve, für welche diese Hauptnormale eine Symmetrieachse ist.

2. Eine Ebene senkrecht zu einer Hauptnormale schneidet die Fläche in einer Kurve, die in dem Schnittpunkt der Hauptnormale mit der Ebene einen Mittelpunkt besitzt. Eine Ebene, die der Schraubenachse parallel ist, schneidet also die Fläche in einer Kurve, die unendlich viele Mittelpunkte hat. Die gemeinsame Grundrißprojektion dieser Mittelpunkte ist der Fußpunkt des Lotes, das man aus S' auf die Grundrißspur der Ebene fällt.

Man erhält einen Überblick über die Schraubenfläche in ihrer ganzen Ausdehnung, indem man ihre Meridiankurve (z. B. den Schnitt mit der frontalen Ebene durch die Achse) konstruiert. Dies erreicht man, indem man die frontale Ebene mit den Tangenten der Schraubenlinie schneidet. Die Asymptoten der Meridiankurve bestimmen sich dabei durch die Aufrißprojektion der Tangenten in C und E. Die ganze Meridiankurve besteht aus unendlich vielen Zweigen, die den bereits konstruierten kongruent sind. In Fig. 254 sind mehrere solche Zweige gezeichnet. Sie teilen die Ebene in eine Reihe krummliniger Vierecke, und da man die Schraubenfläche durch eine Schraubung der Meridiankurve um ihre Achse erzeugen kann, erkennt man, daß die Fläche den Raum in unendlich viele schraubenförmige Röhren teilt, die von den genannten Vierecken beschrieben werden, jede dieser Röhren wird von vier Flächenstreifen begrenzt, die längs der vier, von Doppelkurven (oder der Spitzkante) der Schraubenfläche gebildeten Kanten zusammenstoßen.

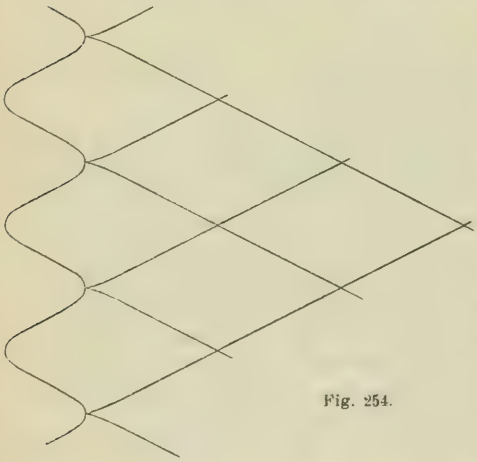


Fig. 254.

289. Bei der Abwickelung der Schraubenfläche hat die Abwickelung der Spitzkante einen konstanten Krümmungsradius und wird also ein Kreis mit dem Radius $\varrho = R''M$ (Fig. 253). Man kann mit der Zeichnung dieses Kreises s^* beginnen (Fig. 255). Indem man sich den Richtungskegel längs der zu der Tangente der Schraubenlinie in A parallelen Seitenlinie aufgeschnitten und so ausgebreitet denkt, daß diese Seitenlinie senkrecht zur Tangente von s^* in A^* zu liegen kommt, findet man leicht die Lage, welche die verschiedenen Erzeugenden der Schraubenfläche bei der Abwickelung einnehmen. Der Schraubengang AE deckt bei der Abwickelung einen Kreisbogen A^*E^* mit dem Gradmaß $360^0 \cdot \sin\alpha$, wenn $\alpha = 90^0 - \beta$ den Achsenwinkel des Kegels bedeutet (276). Der Bogen A^*E^* kann auch durch direkte Anwendung der Abwickelung der Schraubenlinie bestimmt werden, indem seine Länge gleich der Länge eines Schraubenganges, also $= 2C'C'_1$ wird. Die Grundrißspur der Schraubenfläche wird als eine Evolvente des Kreises s^* abgewickelt. Der Punkt P auf der Tangente in B wird in P^* übergeführt, und es wird $B^*P^* = B_2P_2$ (wobei $B''B_2$ und $P''P_2$ horizontal gezogen sind). In den Figuren ist angegeben, wie man die Tangente an die Abwickelung c^* einer beliebigen Kurve c auf der Schraubenfläche konstruieren kann. Das Prinzip ist dasselbe, das wir bereits auf Kegelflächen angewendet haben (vgl. 276).

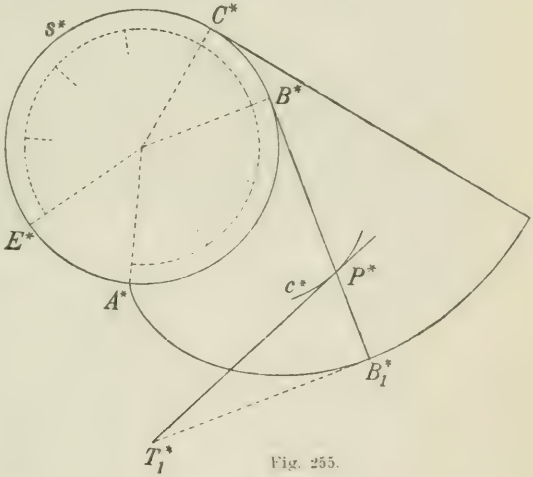


Fig. 255.

290. *Die schräge Parallelprojektion einer Schraubenlinie auf eine zur Achse senkrechte Ebene ist eine Zykloide.*

Wir projizieren auf die Grundrißebene und nehmen die Projektionsrichtung vorläufig parallel zu den Tangenten in den vordersten Punkten der Schraubenlinie an (Fig. 256). Wenn die von dem Kreis k und dem Punkte A gebildete unveränderliche Figur in vertikaler Richtung verschoben und gleichzeitig um den Mittel-

punkt des Kreises gedreht wird, so daß k in die Lage k^* und A in einen neuen Punkt B auf der Schraubenlinie gelangt, bleibt das Verhältnis zwischen der Verschiebung und der Drehung konstant. Die Figur k^*B wird also durch die genannte Parallelprojektion in eine Figur $k_1{}^*B_1$ projiziert, die in der Grundrißebene aus kA durch eine Verschiebung in der Richtung AE_1 in Verbindung mit einer Drehung um den Mittelpunkt von k, die der

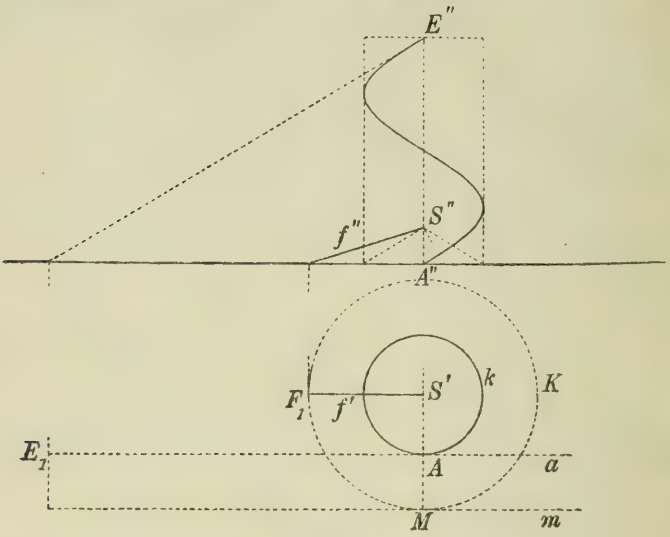


Fig. 256.

Verschiebung proportional ist, erzeugt wird, und da eine Verschiebung von der Größe AE_1 einer ganzen Umdrehung des Kreises entspricht, wird der geometrische Ort für B_1 eine Zykloide, die man erzeugt, indem man k auf a rollen läßt. Die Projektion der Schraubenlinie wird also eine Zykloide, deren Spitzen in A und E_1 liegen.

Ist die Projektionsrichtung nun durch eine beliebige Frontlinie f, die durch die Spitze S des Richtungskegels geht, gegeben, so betrachten wir einen Kreis K mit dem Mittelpunkt S', der durch die Grundrißspur F_1 von f geht. Die unveränderliche Figur AMK schrauben wir ähnlich wie früher in die Lage BNK^*, wobei B auf der gegebenen Schraubenlinie liegt, N liegt dann auf einer Schraubenlinie, deren Tangenten in den vordersten Punkten zu f parallel sind. Hieraus folgt, daß die Parallelprojektion

$B_1 N_1 K_1$* aus AMK entsteht, indem man K auf der zur trennenden Achse parallelen Linie m rollen läßt. Der geometrische Ort für B_1 ist also eine Zykloide, und zwar eine gestreckte, wenn f (wie in der Figur) außerhalb des Richtungskegels fällt. Fällt f innerhalb des Richtungskegels, so ist die Zykloide verschlungen und hat Doppelpunkte. Diese Doppelpunkte entsprechen den Projektionsstrahlen, welche die Schraubenlinie zweimal schneiden. Man findet sie, indem man zunächst die Hauptnormalen bestimmt, die auf der Projektionsrichtung senkrecht sind. Diese Hauptnormalen sind zur Aufrißebene senkrecht, wenn die Projektionsrichtung, wie in der Figur, der Aufrißebene parallel angenommen wird. Eine von ihnen wird also im Aufriß durch den Punkt E'' dargestellt, und die Aufrißprojektion des Projektionsstrahles durch E'' schneidet die Aufrißprojektion der Schraubenlinie in zwei Punkten, die in der Parallelprojektion Doppelpunkte liefern.

291. *Alle Normalen einer Schraubenlinie, die zu einer festen Linie f senkrecht sind, treffen eine und dieselbe Linie, die zur Achse der Schraubenlinie parallel ist.*

Die Linie f denken wir uns durch die Spitze S des Richtungskegels gelegt. Die Grundrißspur sei F_1. k sei die horizontale Projektion der Schraubenlinie (Fig. 257). Wir suchen die Normale n, die zu einem beliebigen Punkt B auf der Schraubenlinie gehört und zu f senkrecht ist. Da n zur Tangente der Schraubenlinie in B senkrecht ist, ist es auch senkrecht auf der dazu parallelen Seitenlinie r des Richtungskegels. Diese Seitenlinie habe die Grundrißspur R_1 ($S'R_1 \perp S'B'$). Da n so auf der Ebene rf senkrecht ist, wird die Grundrißprojektion von n zu der Grundrißspur R_1F_1 der Ebene rf senkrecht. Dreht man nun $S'F_1$ durch einen rechten Winkel um S' in die Lage $S'F$, so daß R_1 durch dieselbe Drehung nach B' fällt, dann ist $FB' \perp R_1F_1$ und FB' ist deshalb die Grundrißprojektion der gesuchten Normalen. So erkennt man, daß die Grundrißprojektionen dieser Normalen alle durch den festen Punkt F gehen. Die Normalen selbst schneiden mithin eine vertikale Linie a_1 mit der Grundrißspur F. Ist f horizontal, so liegt F unendlich fern. Da F von dem Kreis k nicht

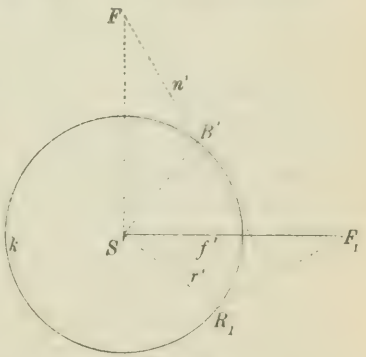


Fig. 257.

abhängt, sondern nur von der Schraubenachse und Ganghöhe, können wir denselben Punkt F für alle Schraubenlinien, die die gegebene Achse, die gegebene Ganghöhe und den gegebenen Schraubensinn haben, benutzen. Folglich: *Bei einer beliebigen Schraubenbewegung schneiden alle Bahnnormalen, die zu einer gegebenen Linie f senkrecht sind, eine und dieselbe Linie a_1, die zur Schraubenachse parallel ist.*

Leitkurven und Leitflächen.

292. Eine abwickelbare Fläche kann durch zwei *Leitkurven* bestimmt werden, d. h. zwei Kurven, die alle Tangentialebenen der Fläche berühren. Eine Tangentialebene Π der Fläche muß von jeder der beiden Kurven eine Tangente enthalten. Die Erzeugende, längs der die Ebene berührt, ist dann die Verbindungslinie der Berührungspunkte A und B dieser beiden Tangenten. Wenn nämlich eine andere Tangentialebene Π_1 die Kurven in A_1 und B_1 berührt und man Π_1 sich Π nähern läßt, indem A_1 und B_1 sich A und B nähern, so nähern sich (nach 260) die Schnittpunkte von Π mit den beiden Tangenten in A_1 und B_1 den Punkten A und B und die Schnittlinie von Π_1 und Π nähert sich AB. (Fallen die Berührungspunkte A und B zusammen, so muß man die Erzeugende auf andere Weise bestimmen.)

Eine allgemeine Methode zur Bestimmung einer beliebigen Erzeugenden ist die folgende: Man wählt einen Punkt A auf der einen Leitkurve und zieht die Tangente a in diesem Punkt. Von einem beliebigen Punkt (z. B. A) auf a projiziert man die andere Leitkurve durch eine Kegelfläche. Eine Tangentialebene durch a an diesen Kegel ist dann eine Tangentialebene der Fläche, denn sie enthält eine Tangente jeder der beiden Kurven.

Gehen zwei oder mehr Tangenten durch jeden Punkt der Leitkurve, so wird diese eine doppelte oder mehrfache Kurve auf der Fläche. Gibt es auf der Kurve Teile, von deren Punkten man keine Erzeugende ausgehen lassen kann, so gehören diese Kurventeile in Wirklichkeit nicht zur Fläche.

In dem Falle, wo die Leitkurven eben sind und in parallelen Ebenen liegen, wird die Konstruktion sehr einfach, indem dann jede Erzeugende die Berührungspunkte von zwei parallelen Tangenten verbindet, und wir haben bereits (271) gesehen, daß der Punkt, in dem die Erzeugende die Spitzkante berührt, auf der Linie liegt, welche die Krümmungsmittelpunkte der Leitkurven für deren Schnittpunkte mit der Erzeugenden verbindet.

Die Leitkurve kann unendlich fern liegen und wird dann durch einen Richtungskegel gegeben. Die angegebene allgemeine Konstruktion der Erzeugenden läßt sich auch auf diesen Fall anwenden.

Schließlich kann eine abwickelbare Fläche durch zwei Leitflächen bestimmt werden, d. h. durch zwei Flächen, die alle Tangentialebenen der abwickelbaren Fläche berühren. Wenn eine Ebene Π die zwei Leitflächen in A und B berührt, während eine andere Ebene Π_1 sie in den Punkten A_1 und B_1 berührt, und man die Ebene Π_1 sich Π nähern läßt, indem sie beständig die beiden Flächen berührt, so daß A_1, B_1 sich A, B nähern, dann strebt die Schnittlinie der Ebenen der Grenzlage AB zu (wir setzen voraus, daß A und B verschieden sind). Die Berührungspunkte A_1 und B_1 durchlaufen nämlich bestimmte Kurven auf den beiden Flächen, und die Tangenten a_1 und b_1 dieser Kurven in A_1 und B_1 schneiden die Ebene Π in Punkten, deren Grenzlagen A und B sind. Aber da Π_1 a_1 und b_1 enthält, strebt die Schnittlinie von Π_1 mit Π eben der Grenzlage AB zu. Wenn die eine Leitfläche sich auf einen Punkt reduziert, wird die abwickelbare Fläche eine Kegelfläche, die diesen Punkt zur Spitze hat und der anderen Leitfläche umschrieben ist.

293. *Beispiel:* In Fig. 258 sind in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (xyz) zwei kongruente Parabeln a und b mit gemeinsamer Achse z gegeben. a liegt in der yz-Ebene und b in der xz-Ebene. Die Scheitel A und B liegen auf der z-Achse. Wir bestimmen eine beliebige Erzeugende auf der abwickelbaren Fläche, die a und b zu Leitkurven hat, und wählen zu diesem Zweck einen Punkt T auf der z-Achse, von dem aus wir Tangenten TR und TS an die zwei Parabeln ziehen. (Wir tun das, indem wir $AR_1 = TA$ machen und $R_1R \parallel y$ ziehen, ebenso wird $BS_1 = TB$, $S_1S \parallel x$.) Die Linie RS ist dann die gesuchte Erzeugende, ihre horizontale Projektion wird $R'S'$. Bezeichnet man die Subnormale mit k, so hat man

$$(S_1S)^2 = k \cdot TS_1, \text{ und } (R_1R)^2 = k \cdot R_1T,$$

also

$$(RS)^2 = k \cdot R_1S_1 + (R_1S_1)^2,$$

und dies ist konstant, da $R_1S_1 = 2 \cdot AB$. Folglich hat RS eine konstante Länge, und da seine Projektion auf die z-Achse ebenfalls konstant ist, wird auch der Winkel, den RS mit der z-Achse bildet, konstant. Die gesuchte abwickelbare Fläche hat also konstanten Fall. Da $R'S'$ konstante Länge hat, wird die Grundrißprojektion eine Astroide. Die Spitzkante selbst wird eine Raum-

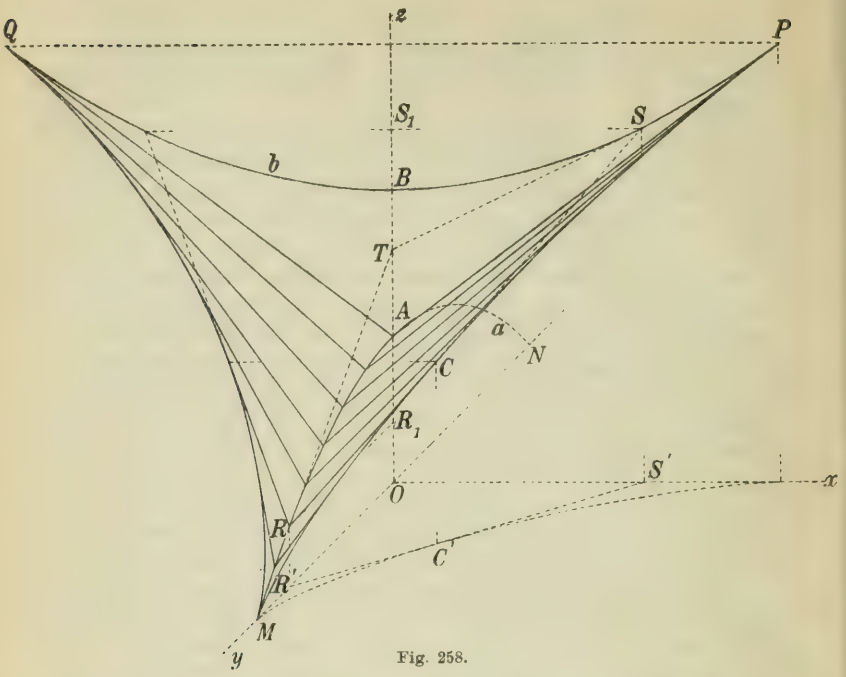


Fig. 258.

kurve mit Spitzen in den Parabelpunkten M, N, P, Q. In der Figur ist der Berührungspunkt C von RS mit der Spitzkante mit Hilfe der Grundrißprojektion konstruiert. Da die yz-Ebene eine Symmetrieebene für die Fläche ist, wird a eine Doppelkurve. Ebenso erkennt man, daß auch b eine Doppelkurve ist.

Allgemeine Hüllflächen. Kanalflächen.

294. Nachdem wir im vorigen die Hüllflächen eines Systems von Ebenen untersucht haben, wollen wir nun zu den Hüllflächen eines beliebigen Flächensystems übergehen, d. h. zu den Flächen, die durch kontinuierliche Bewegung einer veränderlichen oder unveränderlichen Fläche erzeugt werden. Die Schnittkurve k einer Fläche F des Systems und der konsekutiven Fläche heißt eine *Charakteristiklinie*. k ist die Grenzlage für die Schnittkurve von F mit einer anderen Fläche des Systems, die nach F konvergiert. Wir betrachten im folgenden nur ein elementares Flächenstück

von F und setzen voraus, daß der zugehörige Teil der Charakteristiklinie eine einfache Kurve ist. Weiter setzen wir voraus, daß niemals die bewegliche Fläche beim Übergang aus einer Lage in eine andere durch eine feste Kurve geht. *Die Hüllfläche wird dann definiert als der geometrische Ort aller Charakteristiklinien. Sie berührt für gewöhnlich jede Fläche* F *des Systems längs der zugehörigen Charakteristiklinie k.* Ist nämlich A ein beliebiger Punkt auf k und legt man eine Ebene Π durch A, so schneidet diese Ebene die Flächen des Systems in einer Reihe von Kurven, deren Hüllkurve der Schnitt der Ebene mit der Hüllfläche ist. Da also Π die Hüllfläche und die Systemfläche F in zwei Kurven schneidet, von denen uns die Anschauung lehrt, daß sie einander in A berühren, und da dies für eine beliebige Ebene Π durch A gilt, sehen wir in der Tat, daß die Hüllfläche und die Systemfläche in A dieselbe Tangentialebene haben. Auf genauere Untersuchungen über die Gültigkeit des Satzes gehen wir nicht ein.

Wenn sich auf der Hüllfläche eine Kurve s findet, die alle Charakteristiklinien berührt, so läßt sich erwarten, daß s eine Spitzkante der Hüllfläche sein wird. Auf den Beweis hierfür können wir ebenfalls nicht näher eingehen, es mag genügen, auf die abwickelbaren Flächen und die auf den folgenden Seiten behandelten Beispiele hinzuweisen.

Eine gegebene Fläche kann man sich auf unendlich viele Arten als Hüllfläche erzeugt denken, so kann man z. B. eine Umdrehungsfläche erzeugen als die Hüllfläche der Zylinder bzw. Kugeln oder Kegel, die sie längs ihrer Meridiankurven bzw. Parallelkreise berühren. Doch ist hierzu zu bemerken, daß man unter Umständen durch eine solche Erzeugung fremde Elemente mit hineinzieht, die bei der ursprünglichen Fläche nicht enthalten sind. Z. B. kann man ein Umdrehungsellipsoid als die Hüllfläche der Zylinder erzeugen, die es längs seiner Meridiankurven berühren. Aber zu dieser Hüllfläche gehören auch die Tangentialebenen in den Scheitelpunkten des Ellipsoids.

Wenn eine Fläche als Hüllfläche erzeugt wird, kann man oft mit Hilfe dieser Erzeugung die Tangentialebenen finden, die eine gegebene Bedingung erfüllen. Soll man z. B. *der Hüllfläche einen Kegel mit gegebener Spitze* S *umschreiben*, also die Tangentialebenen finden, die durch S gehen, so kann man zu jeder Lage der erzeugenden Fläche die Tangentialebenen suchen, die durch S gehen und deren Berührungspunkte auf die zugehörige Charakteristiklinie fallen, diese Tangentialebenen erfüllen dann die ge-

gebenen Bedingungen. Dies ergibt z. B. bei Umdrehungsflächen drei verschiedene Methoden (vgl. oben S. 263).

Wenn eine Fläche von einem Kreis erzeugt wird, dessen Ebenen beständig dieselbe Stellung haben, so kann man längs jedes der erzeugenden Kreise eine berührende Kegelfläche finden, deren Spitze auf der Tangente der von dem Mittelpunkt des Kreises beschriebenen Kurve liegt. Eine solche Fläche kann also auch als Hüllfläche einer Reihe von Kreiskegeln erzeugt werden. Hat der Kreis konstanten Radius, so gehen die Kegelflächen in Zylinderflächen über.

295. Die Hüllfläche einer unveränderlichen Kugel, deren Mittelpunkt eine gegebene Kurve c durchläuft, heißt eine *Kanalfläche*. c heißt die *Zentralkurve* der Fläche. Zwei Lagen der Kugel K und K_1 mit den Mittelpunkten O und O_1 schneiden einander in einem Kreis, dessen Ebene auf OO_1 in der Mitte senkrecht ist. Wenn O_1 sich O nähert, nähert sich diese Ebene der Normalebene von c in O. *Die Charakteristiklinie k ist also der größte Kreis der Kugel, der in der zugehörigen Normalebene der Zentralkurve liegt.* Die Kanalfläche kann deshalb von einem Kreis k mit unveränderlichem Radius erzeugt werden, dessen Mittelpunkt eine Kurve c durchläuft, während seine Ebene die Normalebene von c ist.

Die Normalebenen der Kurve c umhüllen eine gewisse abwickelbare Fläche, welche die *Polarfläche* von c heißt. Nur wenn c eine gerade Linie oder ein Kreis ist, gibt es keine solche Fläche. Wenn die Normalebene von c in dem Punkt O auf der Polarfläche rollt, so durchläuft O, indem es der Bewegung der Ebene folgt, die Kurve c, und wenn auch der Kreis k an der Bewegung teilnimmt, so erzeugt er die Kanalfläche. *Jede Kanalfläche kann also von einem Kreis k erzeugt werden, dessen Ebene auf einer abwickelbaren Fläche rollt oder insbesondere durch eine feste Achse geht.* Das letztere tritt ein, wenn c ein Kreis ist; die Kanalfläche wird dann ein *Kreisring* oder *Torus*.

Schneidet k bei seiner Bewegung die Berührungslinie seiner Ebene mit der Polarfläche, berührt k also selbst die Polarfläche (im allgemeinen in zwei Punkten), so bilden die Berührungspunkte augenscheinlich eine Spitzkante der Kanalfläche.

Die Normalen der Kanalfläche sind Normalen der Zentralkurve und umgekehrt.

Die senkrechte Projektion einer Kanalfläche auf eine beliebige Ebene Π wird begrenzt von zwei Kurven, die zu der Projektion c' von c auf die Projektionsebene parallel und im Abstand des Kugelradius verlaufen. Wir betrachten eine Lage der Kugel mit dem

Zentrum O (Fig. 259). Die Punkte der zugehörigen Charakteristiklinie, deren Tangentialebenen senkrecht zu Π sind, müssen auf dem größten Kreis der Kugel liegen, der zu Π parallel ist, also auf der zu Π parallelen Normale AB von c. Die Projektion von AB wird eine Normale von c' und $O'A' = O'B'$ wird gleich dem Kugelradius. Wenn eine der parallelen Kurven eine Spitze bekommt, bedeutet dies im allgemeinen einen Übergang von einem sichtbaren zu einem unsichtbaren Teil der zugehörigen Kurve auf der Kanalfläche. Man sehe Fig. 260, wo ein Teil einer Kanalfläche gezeichnet ist.

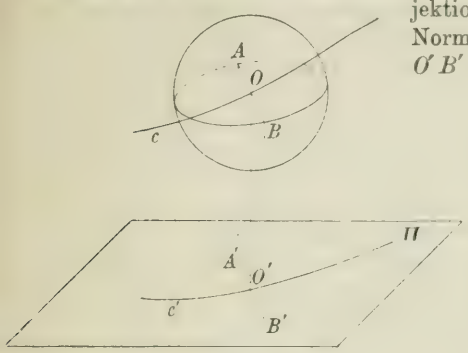


Fig. 259.

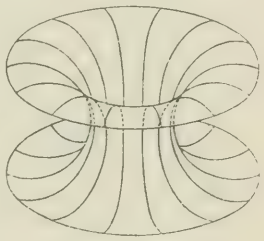


Fig. 260.

296. *Schlangenfläche* nennt man eine Kanalfläche, deren Zentralkurve eine Schraubenlinie ist (Fig. 261). Wir denken uns die Fläche erzeugt von dem Kreis k mit der Aufrißprojektion $A''B''$ (Fig. 262). Die von dem Mittelpunkt O beschriebene Schraubenlinie habe die Grundrißprojektion s'. k_u gibt die Umdrehung des Kreises in die Frontebene durch O an. Wir wollen nun zeigen, wie man die Schnittkurve dieser Fläche mit einer horizontalen Ebene Π durch O finden kann. Die Fläche kann erzeugt werden durch eine Schraubenbewegung des gegebenen Kreises k, wobei die Tangente der von O beschriebenen Schraubenlinie in O senkrecht zu der Ebene von k ist. Nimmt man $O''R \perp A''B''$ und

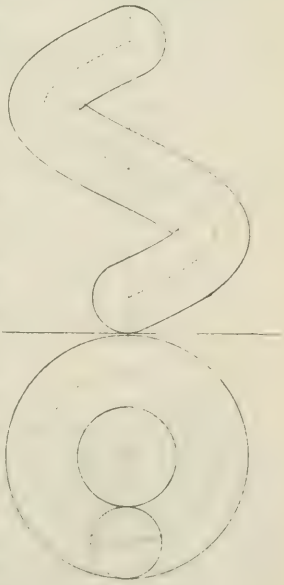


Fig. 261.

$RS \# QO'$, welch letztere Strecke durch Rektifikation von $^1/_8$ des Kreises s' entsteht, so gibt $O''S$ $^1/_8$ der Ganghöhe an. Die Tangente der Schraubenlinie in O schneidet nämlich eine horizontale Ebene, die um $^1/_8$ der Ganghöhe unter O liegt, in dem Punkt, den man durch Abwickelung von $^1/_8$ des Kreisumfanges finden kann.

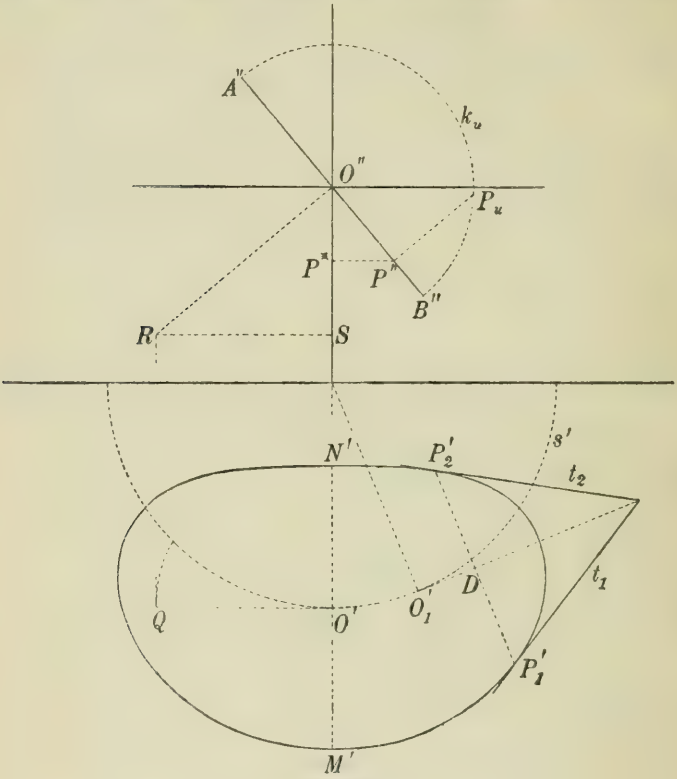


Fig. 262.

Wir wählen nun auf k einen Punkt P, dessen Abstand von Π z. B. $^1/_{16}$ der Ganghöhe ist, und schrauben diesen Punkt hinauf nach Π. Dann gelangt O nach O_1, indem man für den Bogen $O' O_1'$ $^1/_{16}$ des Umfanges nimmt. Die Grundrißprojektion von P nach dieser Schraubung ist P_1' ($O_1' D = P^* P''$ und $D P_1' = P'' P_u$); P_1' ist dann die Grundrißprojektion eines Punktes auf der gesuchten Kurve. Die Tangente ist senkrecht auf $P_1 O_1$, und da sie

horizontal ist, ist ihre Grundrißprojektion $t_1 \perp O_1' P_1'$. Gleichzeitig wird symmetrisch zu P_1' bezüglich $O_1' D$ ein anderer Punkt P_2' samt der Tangente t_2 bestimmt. Der Durchmesser MN des gegebenen Kreises, der senkrecht auf der Schraubenachse steht, wird eine Symmetrieachse der gesuchten Kurve.

Man kann die gesuchte Schnittkurve auch auf einem anderen Wege bestimmen. Man kann die Schlangenfläche nämlich betrachten als die Hüllfläche einer Reihe kongruenter Rotationszylinder, deren Achsen die Tangenten der Zentralkurve sind, und deren Radius gleich dem Radius des erzeugenden Kreises wird. Die Schnittkurve der Fläche mit der horizontalen Ebene Π wird also die Hüllkurve für die Spuren der genannten Zylinder in dieser Ebene. Der Zylinder, von welchem k ein Normalschnitt ist, schneidet aber Π in einer Ellipse k_1, von welcher MN die kleine Achse ist und deren große Achse auf die Tangente des Kreises s' in O' fällt. Läßt man nun diese Tangente auf s' rollen und die Ellipse k_1 der Bewegung folgen, so werden die verschiedenen Lagen von k_1 eben die Spuren der genannten Zylinder, und die Hüllkurve von k_1 ist die gesuchte Kurve. Die in der Figur dargestellte Schlangenfläche hat keine Spitzkante; ist aber der Radius von k größer als der Krümmungsradius der von O beschriebenen Schraubenlinie, so entsteht auf der Fläche eine Spitzkante.

Zwölftes Kapitel.

Windschiefe Flächen.

Erzeugung der windschiefen Flächen.

297. *Eine Fläche, die durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt wird und kein abwickelbares Flächenstück enthält, heißt windschief.* Jede Lage der beweglichen geraden Linie heißt eine *Erzeugende* der Fläche. Das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid sind Beispiele von windschiefen Flächen. Wie wir gesehen haben, können diese Flächen von einer geraden Linie erzeugt werden, die auf drei festen geraden Linien gleitet, von denen keine zwei in derselben Ebene liegen. Die allgemeine windschiefe Fläche kann man sich auf ähnliche Weise erzeugt denken, indem man eine gerade Linie auf drei festen Kurven a, b und c, den *Leitkurven*, gleiten läßt.

Die Erzeugende f, die durch einen beliebigen Punkt A von a geht, kann man bestimmen als die Schnittlinie der beiden Kegel, die b und c aus A projizieren. Diese Kegel haben möglicherweise mehrere Seitenlinien gemeinsam, dann gehen durch A mehrere Erzeugende der windschiefen Fläche. Ist die Anzahl der Erzeugenden n, so beschreiben diese, wenn A sich bewegt, n verschiedene Flächenteile, die alle a oder einen Teil von a enthalten, man nennt deshalb dann a eine $n$fache Kurve der Fläche. Bei der Bewegung von A kann sich die Anzahl n verändern und möglicherweise A in eine solche Lage kommen, daß weiterhin kein Schnitt zwischen den Kegeln eintritt. Es gibt dann einen oder mehrere Teile von a, die nicht zu der windschiefen Fläche gehören. Die gleichen Betrachtungen lassen sich auch für die anderen Leitkurven b und c anstellen.

Beispiel: a und b seien Kreise, die in parallelen Ebenen liegen, während c eine gerade Linie ist, die von diesen beiden Kreisen umschlossen wird (Fig. 264). Durch jeden Punkt von a oder b gehen dann zwei Erzeugende, also sind a und b Doppelkurven der

Fläche. Eine beliebige Ebene Π durch c schneidet a und b in je zwei Punkten und enthält also vier Erzeugende der Fläche. Von den sechs Schnittpunkten dieser vier Linien fallen vier auf a und b, während die übrigen im allgemeinen weder auf a noch auf b oder c liegen. Dreht man Π um c, so beschreiben die letztgenannten Punkte also eine neue Doppelkurve der Fläche. Um zu bestimmen, welche Teile von c zu der Fläche gehören, müssen wir alle Punkte auf c finden, von denen aus man Linien ziehen kann, die a und b schneiden. Zuerst ermitteln wir, welche Punkte im Raum überhaupt diese Eigenschaft haben. Wir legen zu diesem Zweck eine Ebene Γ durch die Mittelpunkte von a und b, sie möge a in A und B, b in C und D schneiden (Fig. 263). Die Linien AD, BC, AC und BD teilen nun die Ebene Γ in mehrere Teile, und man erkennt sofort, daß nur die Punkte der Ebene, die in den mit den Zahlen 1—6 bezeichneten Teilen liegen, die Bedingungen erfüllen können.

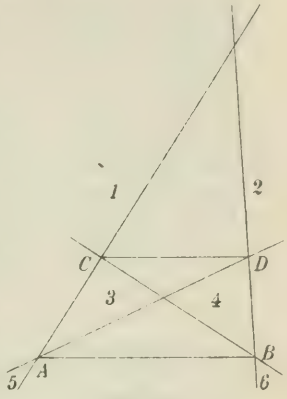


Fig. 263.

Dreht man Γ um die Verbindungslinie der Kreismittelpunkte, so beschreiben AC, BD, AD und BC zwei Kegelflächen, die beide die Kreise a und b enthalten; die von diesen Kegelflächen begrenzten Raumteile, die den genannten Ebenenstücken entsprechen, enthalten dann die sämtlichen gesuchten Punkte.

Die Teile von c, die zur Fläche gehören, werden also begrenzt durch die Schnittpunkte von c mit den beiden Kegelflächen. Diese Schnittpunkte gibt Fig. 264 in Parallelprojektion an. c schneidet die Ebenen der Kreise in R und S. Die Spitzen der beiden Kegel sind P und Q. Um die Schnittpunkte M und N der Linie c mit der Kegelfläche $P(a)$ zu finden, legen wir eine Ebene durch P und c. Diese Ebene schneidet die Ebene von a in RS_1 (S_1 ist die Spur von PS in der Ebene von a), und diese Linie schneidet wieder a in zwei Punkten, deren

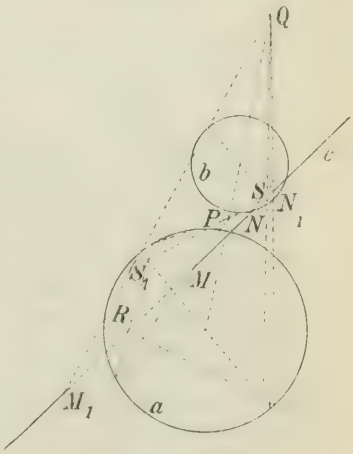


Fig. 264.

Verbindungslinie mit P die zwei Erzeugenden sind, in denen der Kegel $P(a)$ von der Ebene Pc geschnitten wird. Diese beiden Erzeugenden schneiden c in M und N. Auf ähnliche Weise bestimmen sich die Schnittpunkte M_1 und N_1 von c mit der anderen Kegelfläche $Q(a)$. Die in der Figur voll ausgezogenen Teile von c gehören zur Fläche, während die punktierten Teile nicht zur Fläche gehören. Durch jeden Punkt der brauchbaren Stücke von c gehen zwei Erzeugende, durch jeden der Grenzpunkte M, N, M_1 und N_1 nur eine. Geht c durch P oder Q, so löst sich die Fläche in eine Kegelfläche und eine einfachere windschiefe Fläche auf. Geht c durch die beiden Punkte P und Q, so reduziert sich die ganze Fläche auf die durch a und b bestimmten Kegelflächen, ist also nicht mehr eine windschiefe Fläche.

Tangentialebenen.

298. Die Erzeugende f schneide die Leitkurven a, b und c in A, B und C. Wir setzen voraus, daß die Leitkurven in diesen Punkten bestimmte Tangenten a_1, b_1 und c_1 haben, und keine zwei von diesen Tangenten in einer Ebene liegen (Fig. 265). Unendlich ferne Elemente lassen wir vorläufig außer Betracht. Die Ebenen $a_1 f$, $b_1 f$, $c_1 f$ sind die Grenzlagen, denen sich die Ebenen, welche A, B und C mit einer anderen Erzeugenden f_1 der Fläche verbindet, nähern, wenn f_1 sich der Erzeugenden f nähert, und sie sind also Tangentialebenen der Fläche in A, B und C. Betrachten wir nun einen neuen Punkt D auf f, so sehen wir, daß auch die Ebene, welche D mit f_1 verbindet, sich einer bestimmten Grenzlage nähert. Dies erkennt man daraus, daß die Punktreihe $(ABCD)$ projektiv ist zu dem Ebenenbüschel $f_1(ABCD)$. Jeder Punkt von f hat sonach eine bestimmte Tangentialebene, die f enthält, und *die Punktreihe, die von den Punkten auf f gebildet wird, ist projektiv zu dem Ebenenbüschel, den die zugehörigen Tangentialebenen bilden.* Mit Hilfe dieses Satzes erkennt man, daß jede Ebene durch f eine Tangentialebene in einem bestimmten Punkt von f ist. Da die Ebene nämlich zu dem genannten Ebenenbüschel gehört, entspricht ihr ein bestimmter Punkt der Punktreihe.

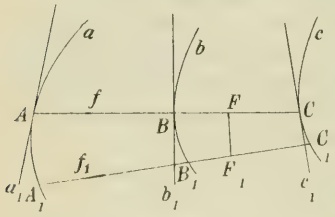


Fig. 265.

Was wir für die im Endlichen liegenden Elemente bewiesen

haben, gilt sofort auch für die unendlich fernen Elemente, da eine windschiefe Fläche durch eine Raumperspektive immer wieder in eine windschiefe Fläche übergeht.

Aus dem gefundenen Satz erfolgt sofort eine Konstruktion für die Tangentialebene in einem beliebigen Punkt D von f, wenn die Tangentialebenen in drei Punkten A, B und C von f bekannt sind (Fig. 266). f schneide die Ebene Π in P, während die Spuren der drei gegebenen Tangentialebenen in Π der Reihe nach a, b und c seien. Die Spur d der gesuchten Tangentialebene bestimmt sich dann dadurch, daß der Strahlenbüschel $(abcd)$ zu der Punktreihe $(ABCD)$ projektiv sein soll. Die Konstruktion kann in einer perspektivischen Darstellung, wie sie die Figur gibt, sofort nach 92 ausgeführt werden.

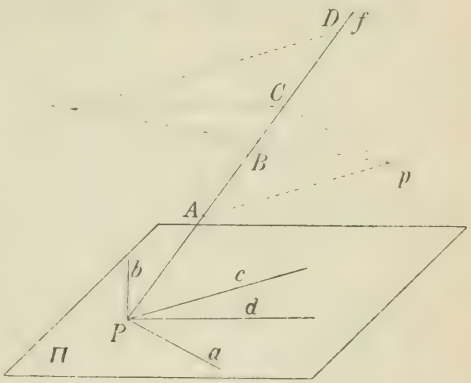


Fig. 266.

Aus dem bewiesenen Satz folgt auch unmittelbar, daß zwei windschiefe Flächen, die eine Erzeugende gemein und in drei Punkten von ihr dieselben Tangentialebenen haben, sich längs der ganzen Erzeugenden berühren müssen.

Für eine beliebige windschiefe Fläche gilt somit auch der Satz, daß die Tangenten an eine Reihe paralleler Schnitte in Punkten derselben Erzeugenden f ein hyperbolisches Paraboloid bilden, das die Fläche längs f berührt. Nehmen wir die Schnitte senkrecht zu f an und drehen die Tangenten durch einen rechten Winkel um f herum, so gelangen wir zu den Normalen der Fläche längs f, *es müssen also die Normalen einer windschiefen Fläche längs einer beliebigen Erzeugenden ein hyperbolisches Paraboloid bilden.*

299. Wenn eine der drei Leitkurven a, b und c, z. B. c, unendlich fern ist, wird sie durch einen Kegel dargestellt, dessen Seitenlinien den Erzeugenden der windschiefen Fläche parallel sind, und der deshalb der *Richtungskegel* der Fläche heißt. Ist insbesondere die unendlich ferne Leitkurve eine gerade Linie, so wird der Richtungskegel zu einer *Richtungsebene*. Die Asymptotenebene, die zu einer Erzeugenden f gehört, ist parallel zu der Tangentialebene des Richtungskegels längs der zu f parallelen Seitenlinie,

die Asymptotebene ist also die Grenzlage für eine durch f parallel zu einer Erzeugenden f_1 gelegte Ebene, die sich f nähert.

Fig. 267 stellt in Parallelprojektion die Leitkurven a und b samt einer Erzeugenden f einer windschiefen Fläche dar, für welche die Ebene Π die Tangentialebene des Richtungskegels längs der zu f parallelen Seitenlinie ist. Π darf nicht durch f gehen. Längs f

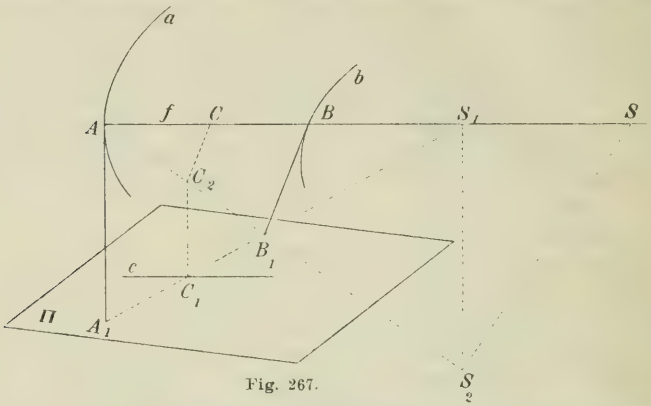


Fig. 267.

kann man nun ein berührendes Paraboloid an die Fläche legen, von dem die Tangenten der Leitkurven in A und B Leitlinien sind, während Π von ihm eine Richtungsebene ist. Schneiden die genannten Tangenten Π in A_1 und B_1, so wird A_1B_1 eine Erzeugende des Paraboloids; eine Erzeugende des Paraboloids, die zu dem anderen System gehört, teilt also AB und A_1B_1 im gleichen Verhältnis. Um die Tangentialebene in C zu finden, bestimmt man deshalb auf A_1B_1 einen Punkt C_1, für den $\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{AC}{BC}$ wird ($CC_2 \parallel BB_1$, $C_2C_1 \parallel AA_1$). Da CC_1 dann eine Erzeugende des Paraboloids ist, wird die Ebene fC_1 die Tangentialebene in C. Ihre Spur c in Π geht durch C_1 und ist parallel zu f.

Sucht man auf f einen Punkt S des Umrisses der Fläche, so lasse man in der Figur c mit f zusammenfallen, C_1 fällt dann in den Schnittpunkt S_1 von f und A_1B_1 und S findet man, indem man $S_1S_2 \parallel AA_1$ und $S_2S \parallel BB_1$ zieht.

Zentralpunkte und Parameter.

300. Die Ebene durch eine Erzeugende f, die auf der zu f gehörenden Asymptotenebene senkrecht steht, heißt die *Zentralebene*, ihr Berührungspunkt der *Zentralpunkt* der Erzeugenden. In

Fig. 268 ist f in Grund- und Aufriß dargestellt. Die Zentralebene ist vertikal angenommen. Der Zentralpunkt C und die Grundrißspur a der Tangentialebene im Punkt A sind gegeben. Die Grundrißprojektionen der Normalen in A und C stehen senkrecht auf a und f' und schneiden einander in einem bestimmten eigentlichen Punkt P. Ein Umdrehungshyperboloid, dessen Achse eine Vertikale p durch P und von dem f eine Erzeugende ist, berührt die gegebene windschiefe Fläche längs f. Die beiden Flächen haben nämlich in drei Punkten von f, nämlich A, C und dem unendlich fernen Punkt, gemeinsame Tangentialebenen. Da nun die Normalen des Umdrehungshyperboloids, also auch die Normalen der gegebenen Fläche längs f die Achse p schneiden, gehen die Grundrißprojektionen der Normalen längs f durch denselben Punkt P. Also: *Wenn die Zentralebene projizierende Ebene bei einer senkrechten Projektion ist, gehen die Projektionen aller Flächennormalen längs der dazu gehörigen Erzeugenden durch denselben Punkt.* Dies kann man zu einer einfachen Konstruktion der Normalen und Tangentialebenen benutzen.

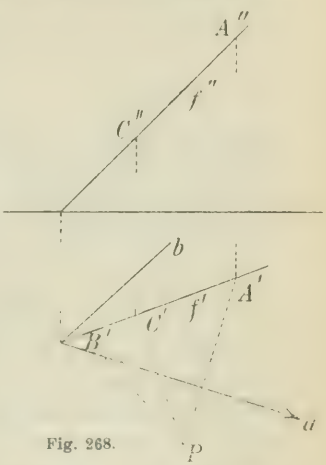


Fig. 268.

301. *Der Zentralpunkt von f ist die Grenzlage für den Fußpunkt F des kürzesten Abstandes FF_1 der Erzeugenden f von einer veränderlichen Erzeugenden f_1, die sich f nähert.* In Fig. 265 bilden nämlich die Ebenen f_1A, f_1B, f_1C, f_1F für jede Lage von f_1 einen Ebenenbüschel, der zu der Punktreihe $(ABCF)$ projektiv ist. Wenn f_1 sich f nähert, nähern sich die drei erstgenannten Ebenen den Tangentialebenen in A, B und C, während die vierte Ebene, weil sie ja in jedem Augenblick senkrecht ist zu einer Ebene, die man durch f parallel zu f_1 legt, sich der Ebene, die durch f geht und auf der Asymptotenebene senkrecht steht, also der Zentralebene nähert. Aber hieraus folgt, daß der Punkt F sich dem Berührungspunkt der Zentralebene nähert, was wir beweisen wollten.

302. Unter dem *Parameter* der Erzeugenden verstehen wir den Abstand des Zentralpunktes von einem Punkt, dessen Tangentialebene den Winkel zwischen der Zentralebene und der Asymptotenebene halbiert. Wenn f den Zentralpunkt C und den Parameter CB hat (Fig. 269) und man $CT = CB$ senkrecht zu f

abträgt, bilden die Linien, die man von T nach den Punkten der Erzeugenden zieht, miteinander dieselben Winkel wie die zugehörigen Tangentialebenen. Der Strahlenbüschel $(cbud)$ ist nämlich projektiv zu dem Büschel der zugehörigen Tangentialebenen, und da die Winkel zwischen c, b und u ebenso groß wie die Winkel zwischen den zugehörigen Tangentialebenen werden, müssen auch die anderen zusammengehörigen Winkel gleich groß sein. Aus einer solchen Figur kann man sofort ersehen, wie schnell sich die Tangentialebene dreht, wenn der Berührungspunkt sich mit gegebener Geschwindigkeit auf der Erzeugenden bewegt.

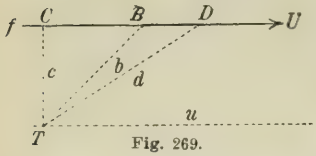


Fig. 269.

Singuläre Erzeugende.

303. Wenn in Fig. 265 die Tangenten b_1 und c_1 in B und C einer Ebene angehören, a_1 aber nicht, so wird, wenn f_1 sich f nähert, die Ebene f_1A sich der Grenzlage fa_1 nähern, während f_1B und f_1C sich derselben Ebene fb_1c_1 nähern. Dann muß sich aber auch die Ebene, die f_1 mit einem beliebigen neuen Punkt D von f verbindet, derselben Ebene nähern. Dies erkennt man aus der Projektivität der Punktreihe $(ABCD)$ und des Ebenenbüschels

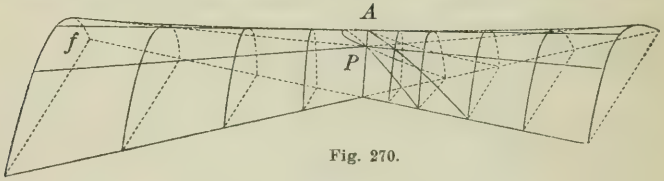


Fig. 270.

$f_1(ABCD)$. Es hat also der Punkt A die Tangentialebene a_1f, alle anderen Punkte der Erzeugenden f dagegen haben dieselbe Tangentialebene fb_1c_1. f nennen wir eine *singuläre Erzeugende*, die Ebene fb_1c_1 ihre *Haupttangentialebene* und A ihren *Spitzpunkt*.

In Fig. 270 ist ein Teil einer windschiefen Fläche mit einer singulären Erzeugenden f dargestellt. A ist ein Grenzpunkt der Leitkurve, auf dem er liegt (er bildet den Übergang von einem brauchbaren zu einem unbrauchbaren Teil der Leitkurve). Diese Leitkurve ist eine Doppelkurve der Fläche, durch einen beliebigen Punkt P von ihr gehen zwei Erzeugende, die sich, wenn P nach A rückt, einander nähern und schließlich in f zusammenfallen. Ein

ebener Schnitt durch A bekommt in A eine Spitze, ein beliebiger anderer ebener Schnitt auf der Doppelkurve einen Doppelpunkt.

Sollen wir der Fläche einen Kegel mit der Spitze S umschreiben, so legen wir z. B. eine Ebene durch SP und ziehen eine Tangente von S an die Schnittkurve dieser Ebene mit der Fläche. Dreht sich die Ebene um SP, so durchläuft die Tangente die gesuchte Kegelfläche.

Wenn die Ebene sich A nähert, so nähert die Tangente sich offenbar der Lage SA. Nun ist die Linie SA in Wirklichkeit keine Tangente der Fläche, wenn nicht S in der Tangentialebene des Speerpunktes liegt, aber da sie die Grenzlage für eine Seitenlinie eines umschriebenen Kegels ist, so rechnet man sie zu diesem. Die Tangentialebene des Kegels längs SA wird Sf, denn diese Ebene ist die Grenzlage für die Tangentialebene des Kegels längs einer veränderlichen Seitenlinie. Wenn S nicht in die Tangentialebene des Speerpunktes fällt, so muß sonach die Berührungskurve des Kegels und der windschiefen Fläche die Erzeugende f in A berühren. Daraus kann man sofort folgern, daß *die Projektion der singulären Erzeugenden den Umriß des benachbarten Flächenteils in der Projektion des Speerpunktes berühren muß.*

Eine singuläre Erzeugende kann einen unendlich fernen Speerpunkt haben, aber in diesem Falle kann sie durch eine passende Raumperspektive in eine singuläre Erzeugende mit einem eigentlichen Speerpunkt übergeführt werden, und die gefundenen Sätze gelten auch in diesem Falle. *Bei einer Parallelprojektion einer windschiefen Fläche werden also alle singulären Erzeugenden mit unendlich fernem Speerpunkt im allgemeinen als Asymptoten des Umrisses der Fläche dargestellt.*

304. Der *Zentralpunkt einer singulären Erzeugenden* f wird definiert als die Grenzlage für den Fußpunkt F des kürzesten Abstandes FF_1 von f und einer veränderlichen Erzeugenden f_1, die sich f nähert. *Der Zentralpunkt fällt mit dem Speerpunkt zusammen, wenn dieser nicht unendlich fern liegt.* Da nämlich der Ebenenbüschel $f_1(ABCF)$ beständig zu der Punktreihe $(ABCF)$ projektiv ist und die Ebenen f_1B und f_1C sich derselben Grenzlage b_1c_1 nähern, während f_1F sich einer Lage senkrecht zu b_1c_1 und f_1A sich fa_1 nähert, sieht man, daß F sich A nähert. Liegt der Speerpunkt unendlich fern, so fällt er nach wie vor mit dem Zentralpunkt zusammen, solange die Haupttangentialebene nicht zu der Tangentialebene des Speerpunktes senkrecht ist. Tritt dieses aber ein, so kann der Zentralpunkt in irgendeinen Punkt der Erzeugenden fallen. Wohin er fällt, bedarf einer besonderen Untersuchung

Leitflächen.

305. Wenn eine windschiefe Fläche von einer Linie f erzeugt wird, die beständig eine gegebene Fläche berührt, heißt diese Fläche eine *Leitfläche* der windschiefen Fläche.

Möge f die Leitfläche in A berühren und sei der geometrische Ort für A die Kurve k. Wenn dann f nicht eine Tangente von k in A ist, so haben die Leitfläche und die windschiefe Fläche in A dieselbe Tangentialebene, denn die Tangentialebene beider Flächen muß sowohl f wie die in A berührende Tangente von k enthalten. f kann nun beim Übergang aus einer Lage in eine andere nicht beständig k berühren, selbst wenn die beiden Lagen einander noch so sehr benachbart sind, denn dies würde bedingen, daß das durchlaufene Flächenstück abwickelbar wäre. Es gibt also auf jedem noch so kleinen Bogen von k Punkte, wo die beiden Flächen einander berühren. Wenn dann die Tangentialebenen der beiden Flächen sich kontinuierlich ändern, indem der Berührungspunkt A die Kurve k durchläuft, so müssen die beiden Flächen einander in allen Punkten von k berühren.

Soll man eine Erzeugende auf einer windschiefen Fläche mit den Leitkurven a und b und der Leitfläche Γ bestimmen, so kann man einen Punkt A auf a auswählen, und die Schnittlinie des Kegels $A(b)$ und des Γ umschriebenen Kegels mit der Spitze A bestimmen, jede der gefundenen Linien ist dann eine Erzeugende.

Soll eine windschiefe Fläche durch eine Leitkurve a und eine Leitfläche Γ mit der Berührungskurve k bestimmt werden, so kann man einen Punkt B auf k auswählen und die Schnittpunkte A von a mit der in B berührenden Tangentialebene von Γ aufsuchen, AB ist dann eine Erzeugende der Flächen. Insbesondere kann k unendlich fern liegen, Γ wollen wir dann eine *Asymptotenfläche* der windschiefen Fläche nennen.

Die Gesamtheit der Asymptotenebenen der windschiefen Fläche umhüllen im allgemeinen eine abwickelbare Fläche, die *abwickelbare Asymptotenfläche*; diese kann insbesondere auch ein *Asymptotenkegel* werden. Bei einer Parallelprojektion der windschiefen Fläche werden die begrenzenden Erzeugenden der abwickelbaren Asymptotenfläche im allgemeinen Asymptoten des Umrisses der windschiefen Fläche.

Die Striktionslinie.

306. Der geometrische Ort der Zentralpunkte heißt die *Striktionslinie*. Auf jeder Erzeugenden f findet sich also für ge-

wöhnlich ein und nur ein Punkt dieser Kurve, und die allgemeine Konstruktion dieses Punktes ist aus dem vorstehenden ersichtlich: Zuerst bestimmt man die Asymptotenebene, darauf dreht man sie durch einen rechten Winkel um f, der Berührungspunkt der neuen Ebene ist dann der gesuchte Zentralpunkt. Hat die Fläche singuläre Erzeugende, so schneidet die Striktionslinie diese in den zugehörigen Speerpunkten, doch braucht dies nicht einzutreten, wenn der Speerpunkt unendlich fern liegt (304).

Hat die Fläche eine Richtungsebene Π, so sind alle Asymptotenebenen dieser parallel, die Zentralebenen sind also zu Π senkrecht, und die Striktionslinie wird die Berührungskurve eines umschriebenen Zylinders, dessen Seitenlinien senkrecht zu Π sind. Auf einem hyperbolischen Paraboloid wird demnach die Striktionslinie für jede Regelschar eine Parabel, deren Achse mit der Achse der Fläche zusammenfällt.

Hat die Fläche einen beliebigen Richtungskegel, so wird die Asymptotenebene zu dessen Tangentialebene parallel und die Zentralebene mithin parallel zu den Normalebenen des Richtungskegels. Ist der Richtungskegel ein Rotationskegel, so gehen alle diese Normalebenen durch die Kegelachse und die Zentralebene wird zu dieser Achse parallel. In diesem Falle wird also die Striktionslinie auch die Berührungskurve eines umschriebenen Zylinders, dessen Seitenlinien zu der Achse des Richtungskegels parallel sind. Jede windschiefe Fläche, deren Richtungskegel ein Rotationskegel ist, kann von einer beweglichen geraden Linie erzeugt werden, die beständig einen festen Zylinder berührt und die Seitenlinie unter einem konstanten Winkel schneidet. Die Berührungskurve der Fläche mit dem Zylinder ist die Striktionslinie. Ein Beispiel einer solchen Fläche bildet das Umdrehungshyperboloid, die Striktionslinie fällt dann mit dem Kehlkreis zusammen.

307. Auf einem allgemeinen einschaligen Hyperboloid hat jede Regelschar ihre Striktionslinie. Die beiden Kurven müssen zueinander symmetrisch bezüglich jeder der drei Hauptebenen sein. Von jeder der Kurven gilt folgender Satz: *Die Striktionslinie halbiert die Strecken auf den Regelstrahlen des Hyperboloids, die von zwei bestimmten Ellipsen auf der Fläche begrenzt werden, nämlich von den Berührungskurven der Rotationszylinder, die man dem Hyperboloid umschreiben kann.*

In Fig. 271 sind OA und OB die Halbachsen der Kehlellipse, und die Frontlinie f durch B ist ein Regelstrahl der Fläche. Der Hauptschnitt der Fläche in der Aufrißebene ist eine Hyperbel h

mit der reellen Halbachse OA und der einen Asymptote f''. Eine Kugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OB schneidet die Aufrißebene in dem Kreis k. Eine gemeinsame Tangente von k und h berühre h in S. Dann berührt der der Kugel in der Richtung dieser gemeinsamen Tangente umschriebene Zylinder das Hyperboloid in der Ellipse, in der die Ebene OBS die Fläche schneidet.

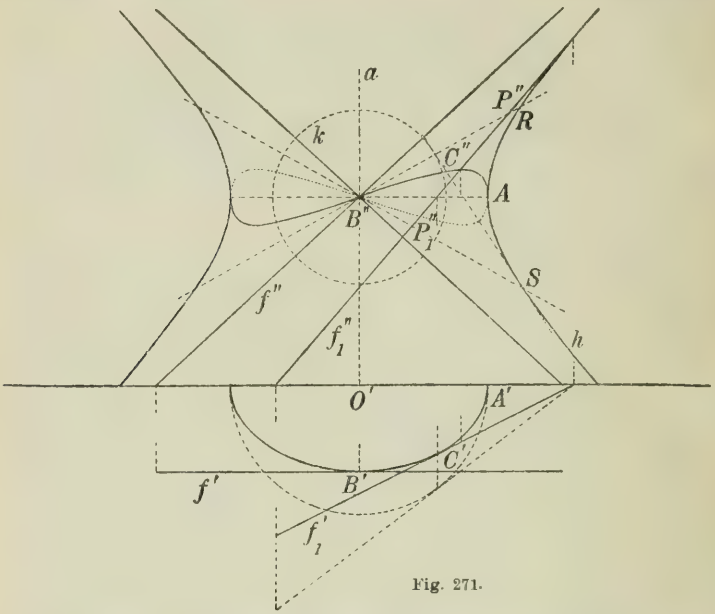


Fig. 271.

Die zu OBS symmetrische Ebene OBR schneidet das Hyperboloid in einer anderen Ellipse, die ebenfalls die Berührungskurve eines umschriebenen Rotationszylinders ist. Eine beliebige Erzeugende f_1 schneide nun die Ellipsen in den Punkten P und P_1, deren Aufrißprojektionen auf $B''R$ und $B''S$ fallen. Die Tangentialebenen Π und Π_1 des Hyperboloids in diesen Punkten berühren die beiden Zylinder und sind also Tangentialebenen der benutzten Kugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OB. Da nun die Asymptotenebene Δ für f_1 durch O geht, halbiert sie einen der Winkel zwischen Π und Π_1, während gleichzeitig die Zentralebene Γ den Nebenwinkel halbiert. Γ und Δ sind also mit Π und Π_1 harmonisch verbunden und die Berührungspunkte von Γ und Δ sind mit P und P_1 harmonisch verbunden. Da nun der Be-

rührungspunkt von Δ unendlich fern liegt, muß der Berührungspunkt von Γ in der Mitte zwischen P und P_1 liegen. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Projektion der Striktionslinie kann leicht gezeichnet werden. Sie geht durch die Scheitelpunkte der Kehlellipse hindurch und ist symmetrisch bezüglich jeder Achse der Fläche. Die beiden Projektionen der Kurve haben deshalb zwei Symmetrieachsen. Die beiden Striktionslinien eines Hyperboloids liefern ein Beispiel für zwei Kurven, welche dieselbe Grund-, Aufriß- und Seitenrißprojektion haben und dennoch verschieden sind.

Konoide.

308. Jede windschiefe Fläche, die eine Richtungsebene und eine gerade Leitlinie besitzt, heißt ein *Konoid*. Man unterscheidet zwischen *geraden* und *schiefen Konoiden*, je nachdem die Leitlinie auf der Richtungsebene senkrecht steht oder nicht. Die Striktionslinie fällt auf einem geraden Konoid mit der Leitlinie zusammen, aber auf einem schiefen Konoid ist sie eine krumme Linie, nämlich die Berührungskurve eines umschriebenen Zylinders, dessen Seitenlinien auf der Richtungsebene senkrecht stehen. Bei einer senkrechten Projektion auf die Richtungsebene fällt also die Projektion der Striktionslinie mit dem Umriß der Fläche zusammen.

Wenn das Konoid durch die Leitkurve a, die gerade Leitlinie b und die Richtungsebene Π bestimmt ist, findet man eine beliebige Erzeugende, indem man einen Punkt A auf a annimmt und den Schnittpunkt B von b mit einer Ebene, die durch A parallel zu Π gelegt wird, bestimmt; AB ist dann eine Erzeugende der Fläche (vgl. Fig. 272).

Man sieht, daß das Konoid durch drei Leitkurven a, b und c (die letztere ist die unendlich ferne Linie der Richtungsebene) bestimmt ist. Die singulären Erzeugenden der Fläche müssen also durch solche Punkte A auf a gehen, deren Tangenten entweder b oder c schneiden (b und c sollen nicht in derselben Ebene liegen).

Ist a eine ebene Kurve, deren Ebene die Ebene Π in der Linie l und b in einem Punkt L schneidet, so kann man demnach die Punkte A, wo die singulären Erzeugenden die Kurve a schneidet, bestimmen als die Berührungspunkte der Tangenten von a, die entweder parallel zu l sind oder durch den Punkt L gehen. Von den auf die erstgenannte Weise bestimmten Erzeugenden liegen die Speerpunkte auf b, von den anderen unendlich fern. Diese letzten Erzeugenden bestimmen auch bei einer Parallelprojektion,

bei welcher Π keine projizierende Ebene ist, die Asymptoten des Umrisses.

In dem Falle, wo eine Ebene, die wir durch L parallel zur Richtungsebene legen, die Ebene der Leitkurve a in der Linie s schneidet und s mit a zwei oder mehr Punkte gemein hat, wird s eine doppelte oder mehrfache Erzeugende der Fläche.

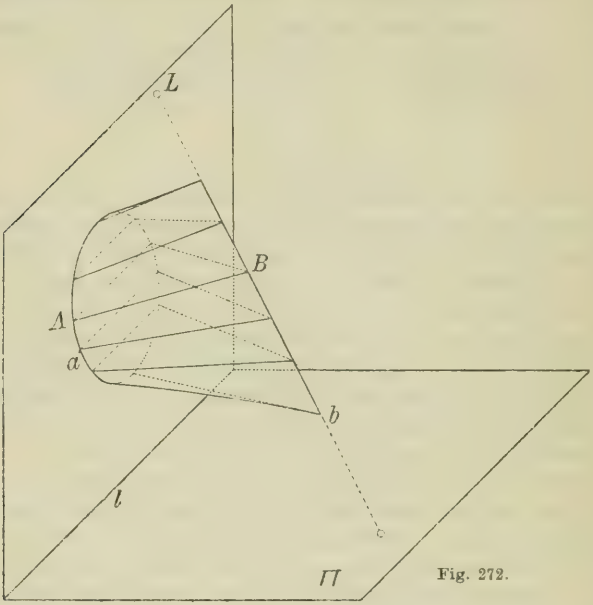


Fig. 272.

Wir wollen noch zeigen, wie man die Schnittpunkte des Konoids mit einer geraden Linie g finden kann. Wenn g die Leitlinie b (oder c) trifft, so geht durch jeden Schnittpunkt der Ebene bg (bzw. cg) mit der Kurve a eine Erzeugende des Konoids, die g in einem der gesuchten Punkte schneidet. Schneidet die Linie g keine der Linien b oder c, so legt man durch g und b ein Paraboloid, dessen Richtungsebene mit der Richtungsebene des Konoids übereinstimmt. Dieses Paraboloid schneidet im allgemeinen die Ebene der Kurve a in einem Kegelschnitt, und durch jeden Schnittpunkt dieses Kegelschnittes mit a geht eine gemeinsame Erzeugende des Konoids und des Paraboloids, die l in einem der gesuchten Punkte schneidet.

Das Zylindroid.

309. Wir betrachten zwei ebene nicht parallele Schnitte a und b einer beliebigen Zylinderfläche und lassen zwei Punkte dieser Schnittkurven, die auf derselben Seitenlinie des Zylinders liegen, einander entsprechen. Wenn nun der eine Schnitt a um ein beliebiges Stück parallel zur Schnittlinie der beiden Zylinderschnittebenen verschoben wird und so in die Lage a_1 gelangt, und entsprechende Punkte von a_1 und b wieder durch gerade Linien verbunden werden, so bilden alle diese Verbindungslinien eine windschiefe Fläche, die wir nach Frézier[1]) ein *Zylindroid* nennen.[2]) Die Fläche hat die zwei Leitkurven a_1 und b und eine Richtungsebene parallel zu den Seitenlinien des Zylinders und der Schnittlinie der beiden Ebenen, aber die durch diese Leitkurven und die Richtungsebene bestimmte vollständige Fläche umfaßt im allgemeinen Flächenteile, die nicht zum Zylindroid gehören.

In Fig. 273 sind a und b vertikal angenommen, ihre Ebenen schneiden sich in der Linie s. a ist ein Kreis, dessen Umlegung in die Grundrißebene a_n wird. Die Seitenlinien sind der trennenden Achse parallel. Wir verschieben a um ein Stück k vertikal nach aufwärts in die Lage a_1. Die der Seitenlinie AB des Zylinders entsprechende Erzeugende des Zylindroids sei A_1B. Auf diesen beiden Linien betrachten wir zwei Punkte C und C_1, die senkrecht übereinander liegen, ihr Abstand CC_1 ist dann bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{CC_1}{k} = \frac{CB}{AB}.$$

Hieraus erkennt man, daß, wenn das letzte Verhältnis konstant ist, auch CC_1 konstant wird, also: *Jede Ebene* Γ *durch* s *schneidet die beiden Flächen in kongruenten Kurven*, denn die Schnittkurve des Zylindroids kann aus der Schnittkurve des Zylinders durch eine vertikale Parallelverschiebung von der Größe $k\,\frac{CB}{AB}$ abgeleitet werden. Trägt man $MN = k$, wie in der Figur angegeben, ab, so wird die Ebene Γ durch s auf dieser Strecke das Stück $NP =$

1) Frézier, *Coupe des pierres*, liv. IV, chap. VII. Straßburg 1739.

2) Das Wort hat leider heutzutage verschiedene Bedeutungen. In der Mechanik wird darunter nach dem Vorschlage von Cayley ein gewisses gerades Konoid verstanden (Plückersches Konoid, vgl. Rohn-Papperitz, *Lehrbuch d. darst. Geom.* 3. Aufl. 1906, Bd. III, S. 233), von dem die Leitlinie b eine Seitenlinie und die Leitkurve a ein ebener Schnitt eines geraden Kreiszylinders ist.

$k \frac{CB}{AB} = CC_1$ abschneiden. Dreht sich die Ebene Γ um s von b nach a, so wird der Abstand des Zylindroidschnitts von dem ebenen Zylinderschnitt beständig durch die Strecke NP dargestellt.

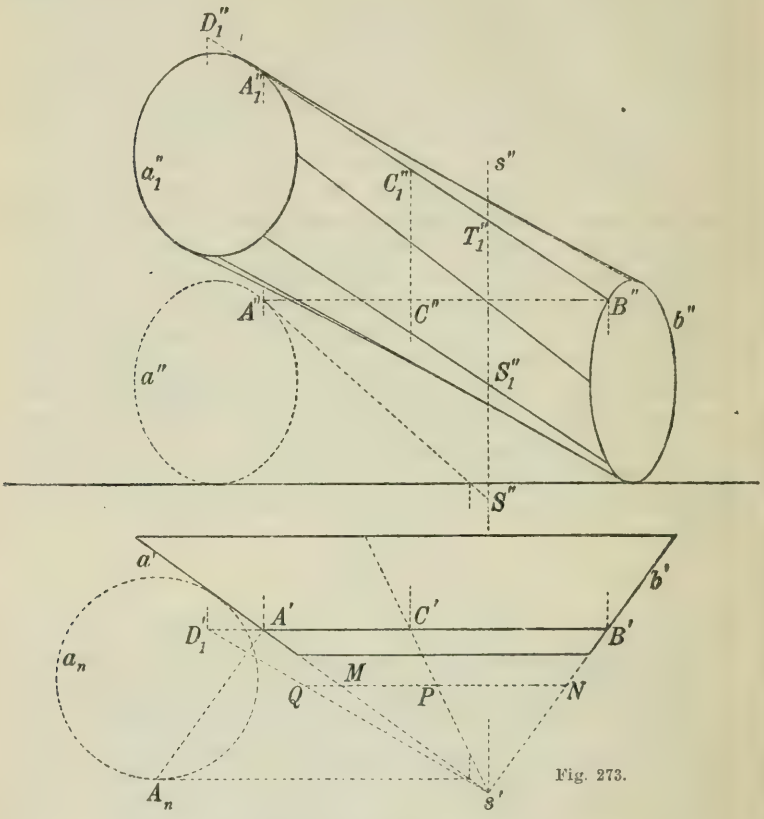


Fig. 273.

Man kann nun leicht die Tangentialebene des Zylindroids im Punkte C_1 finden. Die Tangentialebene des Zylinders längs AB schneide s in S, die Tangente des Zylinderschnitts in C_1 ist dann CS. Trägt man $SS_1 = CC_1$ ab, so erhält man einen Punkt der Tangente des zugehörigen Zylinderschnitts. Durch diese Tangente und die Erzeugende A_1B ist die Tangentialebene bestimmt. Umgekehrt kann man auch leicht den Berührungspunkt

einer durch $A_1 B$ gehenden Ebene bestimmen. Soll man z. B. den Punkt D_1'' des Umrisses der Aufrißprojektion der Fläche als den Berührungspunkt der durch $A_1 B$ senkrecht zum Aufriß gelegten Ebene finden, so suche man den Schnittpunkt T_1 dieser Ebene mit s und trage $NQ = ST_1$ ab. $s'Q$ schneidet dann die Grundrißprojektion der Erzeugenden in D_1', worauf man D_1'' sofort findet. Der Punkt D_1 ist der Zentralpunkt der Erzeugenden.

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte auf a_1 und b_1, deren Tangenten vertikal sind, liefern singuläre Erzeugende der Fläche. Die Tangenten aller drei Leitkurven (d.h. die Tangenten von a_1, b und die unendlich ferne Linie der Richtungsebene) liegen in diesem Falle in derselben Ebene, und diese Ebene ist die Tangentialebene der Fläche in jedem Punkte der betreffenden Erzeugenden. Beim Grenzübergang von der allgemeinen Erzeugenden $A_1 B$ zu einer singulären Erzeugenden sieht man, daß der Berührungspunkt D_1 sich ins Unendliche entfernt, indem ST_1 und damit NQ ins Unendliche wachsen. Die Aufrißprojektionen der singulären Erzeugenden sind also die Asymptoten der Aufrißprojektion der Fläche.

Schiefer Durchgang.

310. *Schiefer Durchgang (Biais passé)* heißt die windschiefe Fläche, die zu Leitkurven zwei kongruente Kreise a und b in parallelen Ebenen und eine gerade Linie c hat, die auf den beiden Ebenen senkrecht ist und durch den Mittelpunkt C der Zentrale OO_1 beider Kreise geht. In Fig. 274 ist eine Parallelprojektion der Fläche gezeichnet, wobei die Projektionsebene den Kreisen parallel angenommen ist. Vorausgesetzt wird, daß a und b nicht Schnitte desselben Rotationszylinders sind und c die Kreise nicht schneidet. Die durch c und OO_1 bestimmte Ebene ist eine Symmetrieebene der Fläche, sie ist nämlich eine Symmetrieebene der Leitkurven; weiter sieht man, daß C ein Symmetriepunkt der Leitkurven ist und daher ein Mittelpunkt der Fläche. Die zu der Ebene der Leitkreise parallelen Ebenen nennen wir der Kürze halber Frontebenen. c möge die Ebenen der Leitkreise in D und E schneiden. Man konstruiert die Erzeugenden der Fläche, indem man Hilfsebenen durch c legt. Eine solche Hilfsebene schneide a in P und A, b in B und Q, PQ und AB sind dann Erzeugende der Fläche, und zwar werden sie infolge der Symmetrie bezüglich C parallel. Die Linien PB und QA schneiden ebenfalls die drei Leitkurven, aber da sie durch C gehen und somit bei der Bewegung

der Hilfsebene eine Kegelfläche mit der Spitze C durchlaufen, gehören sie nicht zu der windschiefen Fläche.

Die Linie MN, welche die Mittelpunkte von AP und BQ verbindet, ist parallel zu den beiden gefundenen Erzeugenden und

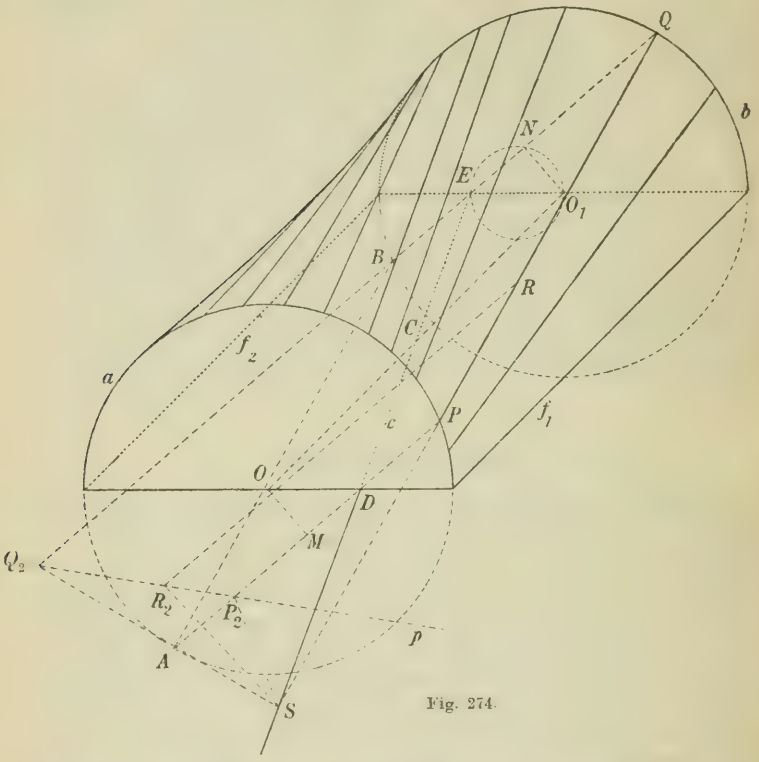


Fig. 274.

geht durch C. Wenn wir die Hilfsebene drehen, so beschreibt sonach MN einen Richtungskegel der Fläche. Die geometrischen Örter für M und N werden Kreise über OD und O_1E als Durchmesser. Mithin ist der Richtungskegel der Fläche ein Kreiskegel. Benutzt man C als Spitze des Kegels, so kann der Kreis über O_1E als Durchmesser für den Grundkreis genommen werden.

Da der Richtungskegel nun bekannt ist, kann die Asymptotenebene für eine willkürliche Erzeugende des schiefen Durchgangs konstruiert werden. Jede Seitenlinie des Richtungskegels wird parallel zu zwei Erzeugenden der windschiefen Fläche, und man

kann deswegen sagen, daß *der schiefe Durchgang einen unendlich fernen Doppelkegelschnitt besitzt.* Eine singuläre Erzeugende entsteht, wenn die Tangenten in P und Q oder A und B parallel sind, also wenn OP und O_1Q dieselbe Richtung haben. Dies tritt ein, wenn O, A und P in einer geraden Linie liegen; AP muß dann entweder ein Durchmesser oder eine Tangente des Kreises a sein. Man erkennt so zunächst, daß die Erzeugenden f_1 und f_2, die in der Symmetrieebene liegen, singuläre Erzeugende sind, ihre Speerpunkte liegen auf c. Des weiteren entsteht eine singuläre Erzeugende jedesmal, wenn die Hilfsebene die Leitkurve a (und b) berührt. Dies kann bei der in der Figur dargestellten Fläche nicht eintreten, aber wenn D und E außerhalb von a und b fallen, ergeben sich zwei Hilfsebenen, die a und b berühren. Die in diesen Ebenen enthaltenen Erzeugenden sind singulär, sie sind Seitenlinien des Richtungskegels, dessen Spitze in C liegt, und teilen diesen Kegel in zwei Teile, von denen nur der eine für die windschiefe Fläche Bedeutung hat. Da die Asymptotenebene für jede der beiden Erzeugenden von der Haupttangentialebene verschieden ist, liegen die Speerpunkte unendlich fern, so daß die gefundenen Erzeugenden bei einer Parallelprojektion im allgemeinen als Asymptoten des Umrisses projiziert werden. Andere Asymptoten des Umrisses entstehen durch Projektion der Erzeugenden, deren Asymptotenebenen projizierende Ebenen sind. Von solchen findet man in der Figur im ganzen vier, indem der Richtungskegel zwei begrenzende Seitenlinien hat, und jeder von diesen zwei Erzeugende der windschiefen Fläche entsprechen.

311. Die Tangentialebene in einem beliebigen Punkt R der Erzeugenden PQ kann man finden, indem man beachtet, daß die Punktreihe $(PQRS)$ (S ist der Schnittpunkt von PQ und c) projektiv zu der Reihe $(P_1Q_1R_1S_1)$ ist, die von den unendlich fernen Punkten auf den Spuren der zugehörigen Tangentialebene in einer Frontebene gebildet wird; P_1, Q_1 und S_1 liegen also unendlich fern in Richtungen, die der Reihe nach senkrecht zu OP, O_1Q (und OA) und parallel zu DP (und EQ) sind. Wir ziehen nun die Kreuzlinien PS_1 und P_1S, QS_1 und Q_1S und gelangen so zu den Punkten P_2 und Q_2 der Perspektivitätsachse p. Die zu DP durch R gezogene Parallele schneide p in R_2, SR_2 gibt dann die Richtung der Spur der gesuchten Tangentialebene an. Der zu der Erzeugenden gehörende Punkt des Umrisses liegt auf p.

312. Eine beliebige Erzeugende AB schneide die Leitkreise in A und B (Fig. 275); AD und BE sind dann parallel. Durch A und B ziehen wir in den Ebenen der beiden Leitkreise zwei

Linien a' und b' senkrecht zu AD und BE. Wenn nun AB die Fläche durchläuft, so umhüllen a' und b' zwei kongruente Ellipsen a_1 und b_1. D ist ein Brennpunkt für a_1, E für b_1. Die Ebene $a'b'$ berührt also beständig einen elliptischen Zylinder, dessen Grundkurven a_1 und b_1 sind, und da die Ebene $ABDE$ auf $a'b'$ senkrecht steht, ist die Gerade AB die Projektion von der Geraden DE auf der Ebene $a'b'$. Daraus folgt: *Der schiefe Durchgang ist der geometrische Ort für die Projektionen der festen Leitlinie DE auf die Tangentialebenen des Zylinders, dessen Grundkurven a_1 und b_1 sind.* Alle Frontebenen schneiden deshalb die Fläche in den Fußpunktkurven einer Reihe kongruenter Ellipsen; durch die Betrachtung dieser Frontschnitte erlangt man einen guten Überblick über die Fläche.

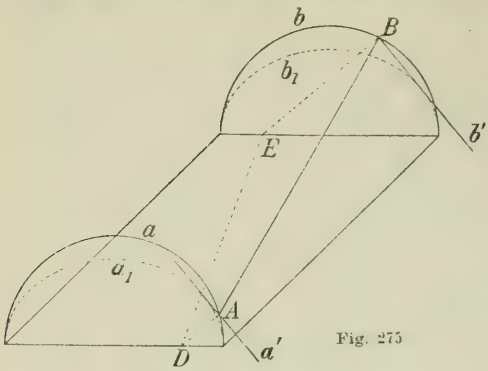


Fig. 275

Wir sind davon ausgegangen, daß D und E innerhalb von a und b liegen. Ist dies nicht der Fall, so erhalten wir an Stelle der Ellipsen a_1 und b_1 zwei Hyperbeln und die Fläche wird der geometrische Ort für die Projektionen der Leitlinie auf die Tangentialebenen eines hyperbolischen Zylinders. Die Frontschnitte sind dann die Fußpunktkurven für eine Reihe kongruenter Hyperbeln. Der Frontschnitt in der Ebene durch C wird insbesondere doppelt symmetrisch und hat die Form einer Lemniskate.

Normalflächen.

313. Eine Fläche, die von den Normalen einer gegebenen Fläche Φ längs irgendeiner Kurve k auf ihr gebildet wird, heißt eine *Normalfläche* von Φ. Die Normalfläche ist im allgemeinen windschief, sie kann aber im besonderen Falle abwickelbar, vielleicht sogar eben werden. Z. B. ist die Normalfläche einer Umdrehungsfläche längs eines Parallelkreises ein Kegel, während die Normalfläche längs einer Meridiankurve eine Ebene wird.

Man kann zeigen, daß auf jeder elementaren Fläche Φ unter

gewissen Voraussetzungen zwei bestimmte Kurvenscharen existieren, die *Krümmungslinien*, längs denen die Normalflächen abwickelbar oder eben sind und die einander unter rechten Winkeln schneiden. Nur auf der Kugel ist jede Kurve eine Krümmungslinie. Auf einer Umdrehungsfläche sind die Krümmungslinien die Parallelkreise und Meridiankurven. Auf einer Zylinderfläche sind es die Seitenlinien und senkrechten Querschnitte, auf einem Kegel die Seitenlinien und die Schnittkurven des Kegels mit den Kugeln um die Kegelspitze. Von einer beliebigen abwickelbaren Fläche wird die eine Schar von Krümmungslinien durch die Erzeugenden der Fläche gebildet, die andere Schar durch die Evolventen der Spitzkante. Umdrehungsflächen, Zylinderflächen, und abwickelbare Schraubenflächen haben also lauter ebene Krümmungslinien. Dasselbe gilt von jeder Fläche, die von einer unveränderlichen ebenen Kurve erzeugt wird, wenn die Ebene der Kurve auf einer beliebigen Zylinderfläche rollt. Solche Flächen heißen *Gesimsflächen*.

Den Steinen in einem Gebäude gibt man nach Möglichkeit eine solche Form, daß die Flächen, die die Steine begrenzen, eben oder wenigstens abwickelbar sind und unter rechten Winkeln zusammenstoßen. Ist die äußere Begrenzungsfläche des Mauerwerkes gekrümmt, so sollen nach diesem Prinzip die Fugenlinien Krümmungslinien dieser Fläche, und die Flächen, die die Steine begrenzen und die Außenfläche treffen, die zu den Krümmungslinien gehörenden Normalflächen werden. Bei Umdrehungsflächen und Zylindern (Kuppeln und Tonnengewölben) kann man dies Prinzip leicht vollständig durchführen. Aber bei Flächen, deren Krümmungslinien doppelt gekrümmt sind, wird dies im allgemeinen zu schwierig, und man muß in solchen Fällen für gewöhnlich andere Flächen als Grenzflächen der Steine benutzen.

314. Im folgenden wollen wir die *Normalfläche einer Kegelschnittfläche* längs eines zu einem Hauptschnitt parallelen Schnittes k oder, was dasselbe heißt, für die längs k berührende Kegelfläche untersuchen. Wir betrachten indessen nur den Fall, wo k eine Ellipse ist, k liege in einer zum Grundriß parallelen Ebene und habe die Halbachsen OA und OB (Fig. 276), von denen die erste in der Aufrißebene liege.

Die Spitze C des Kegels liegt vertikal über dem Mittelpunkt der Ellipse. Die Erzeugende f der Normalfläche, die durch einen Punkt P von k geht, wird im Grundriß als Normale von k' dargestellt, während die Aufrißprojektion senkrecht auf der Spur CT der den Kegel längs CP berührenden Ebene ist. Transformiert man den Kegel durch eine perspektive Affinität, von der die Auf-

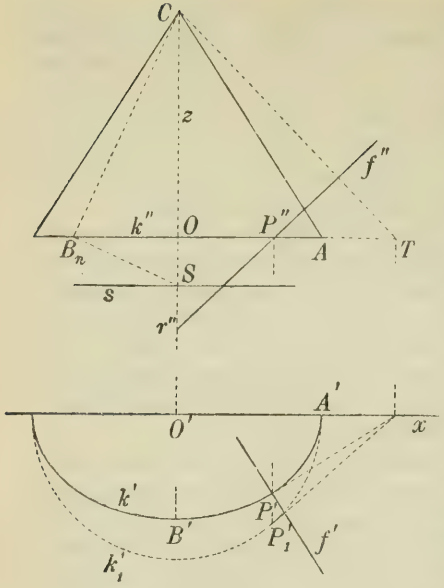


Fig. 276.

rißebene die Affinitätsebene ist, in einen Rotationskegel, so wird CT auch die Spur der an diesen Rotationskegel längs CP_1 gelegten Tangentialebene, und f'' wird die Aufrißprojektion der Normale des Kegels in P_1. Also: Die Aufrißprojektionen der Erzeugenden der Normalfläche fallen mit den Aufrißprojektionen der Normalen des Rotationskegels längs einem Kreise k_1 zusammen und gehen deshalb durch einen und denselben Punkt r''. So erkennt man, daß *die Erzeugenden der Normalfläche alle eine zum Aufriß senkrechte gerade Linie r schneiden.*

Auf genau dieselbe Weise kann man durch Projektion auf die Seitenrißebene erkennen, daß die Erzeugenden auch eine feste Linie s, die zu der trennenden Achse x parallel ist, schneiden müssen. s kann man konstruieren durch Umlegung von COB in die Aufrißebene (als COB_n). Das Lot B_nS von CB_n bestimmt auf der Kegelachse CO einen Punkt S von s. *Die Normalfläche hat also zwei gerade Leitlinien r und s, die zueinander rechtwinklig sind und zusammen mit der Leitkurve k die Fläche vollständig bestimmen.*

r und s sind Doppellinien, die Ebenen Or und Os Symmetrieebenen und CO eine Achse der Fläche. Die vier Erzeugenden durch die Scheitelpunkte der Ellipse sind singuläre Erzeugende. Von den beiden in der Ebene Or enthaltenen singulären Erzeugenden liegen die Speerpunkte auf r, von den beiden in der Ebene Os enthaltenen auf s. Die Aufrißprojektion der Fläche wird von den beiden letztgenannten Erzeugenden begrenzt, der Umriß der Grundrißprojektion ist die Evolute der Ellipse.

315. In Fig. 277 ist die Grundrißprojektion der Fläche dargestellt, die Erzeugende f schneidet r und s in den Punkten R und S, k im Punkte P. Da r, s und k in drei parallelen Ebenen liegen, wird

$$\frac{RP}{SP} = \frac{R'P'}{S'P'} = \text{const.}$$

Damit ergibt sich zugleich der Beweis eines bekannten Satzes über die Normalen einer Ellipse.

Wir können nun auch zeigen, daß *jede zum Grundriß parallele Ebene die Fläche in einer Ellipse schneidet.* Schneidet die Ebene die Erzeugende f in M, dann findet man nämlich, daß die Verhältnisse

$$\frac{YP'}{YN} = \frac{R'P'}{R'M'} = \frac{RP}{RM'}$$

und

$$\frac{XN}{XM'} = \frac{S'P'}{S'M'} = \frac{SP}{SM}$$

konstant werden. Der geometrische Ort von N ist also eine Ellipse n, die k' in einer perspektivischen Affinität mit der Affinitätsachse r' entspricht, und der geometrische Ort von M' entspricht n in einer perspektivischen Affinität mit der Affinitätsachse s'. Dieser Ort ist deshalb eine neue Ellipse m, und der Satz ist damit bewiesen.

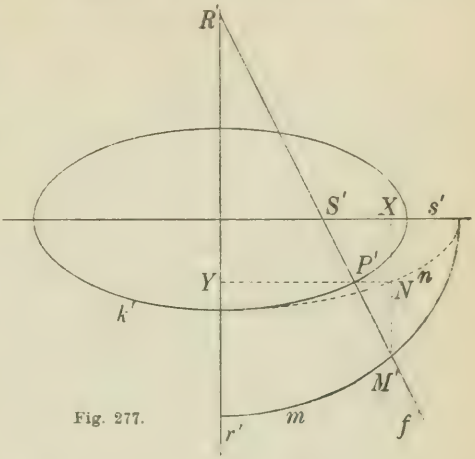


Fig. 277.

Fig. 278 zeigt die Leitkurven k, r und s in Parallelprojektion. Die singulären Erzeugenden sind a, a_1, b und b_1, alle Ebenen senkrecht zur Achse RS schneiden die Fläche in Ellipsen, die von den Symmetrieebenen aa_1 und bb_1 der Fläche symmetrisch geteilt werden. Die Scheitelpunkte dieser Ellipsen liegen immer auf den singulären Erzeugenden. Einen guten Überblick über die Ellipsen erhält man, wenn man die von den Linien b, b_1 gebildete Figur um die Achse in die Ebene aa_1 herumdreht (b^*, b_1^* in Fig. 279); die Ellipsen, deren Mittelpunkte O_1 und O_2 sind, haben die Halbachsen O_1A_1, O_1B_1 (oder O_1B_1') bzw. O_2A_2, O_2B_2. Nimmt man die Punkte O_1, O_2 so an, daß

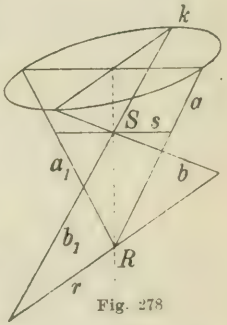


Fig. 278

$$\frac{O_1S}{O_2S} = \frac{RO_1}{RO_2}$$

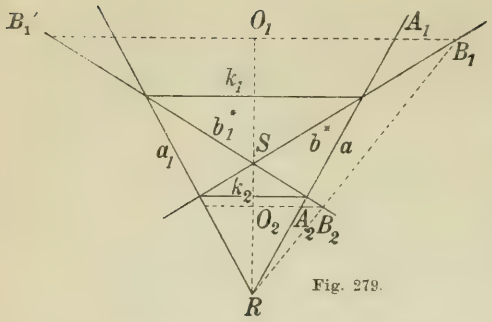


Fig. 279.

wird, so ergibt sich einerseits

$$\frac{A_1O_1}{A_2O_2} = \frac{RO_1}{RO_2},$$

andererseits

$$\frac{B_1'O_1}{B_2O_2} = \frac{O_1S}{O_2S},$$

also folgt

$$\frac{A_1O_1}{A_2O_2} = \frac{B_1O_1}{B_2O_2},$$

d. h. *elliptische Schnitte, deren Ebenen den Abstand zwischen den Leitlinien der Fläche harmonisch teilen, sind ähnlich und in ähnlicher Lage.* Wenn die eine Schnittkurve sich ins Unendliche entfernt, nähert sich die andere der Lage mitten zwischen den Leitlinien, also werden die Linien, die von R (oder S) nach den Punkten dieses Mittelschnittes hinführen, den Erzeugenden der Fläche parallel und bilden deshalb einen Richtungskegel der Fläche. *Der Richtungskegel der Fläche ist also ein schiefer Kreiskegel.* Unter den Ellipsenschnitten sind zwei Kreisschnitte k_1 und k_2 enthalten. Man findet sie, wenn man durch die Schnittpunkte der Linien b^*, b_1^* mit a die Ebenen senkrecht zur Achse hindurchlegt.

316. *Wenn zwei Punkte M und N sich um dieselbe Achse z mit gleich großen, aber entgegengesetzten Winkelgeschwindigkeiten drehen, so erzeugt ihre Verbindungslinie im allgemeinen eine Normalfläche der beschriebenen Art.*

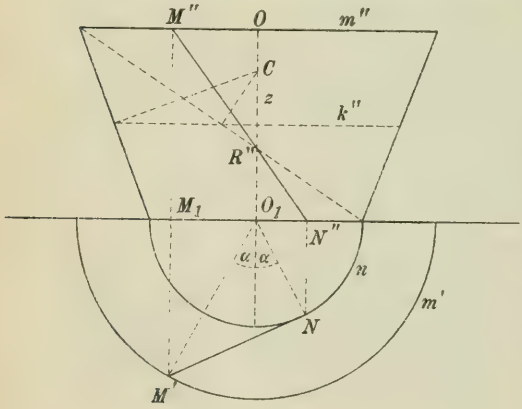


Fig. 280.

Da die Ebenen zM und zN sich gleich schnell nach entgegengesetzten Seiten drehen, muß die Halbierungsebene des von ihnen gebildeten Winkels fest liegen. Nehmen wir nun z in der Aufrißebene vertikal an (Fig. 280), während eine der genannten Halbierungsebenen senkrecht zur Aufriß-

ebene sei, so beschreibt M den horizontalen Kreis m mit dem Mittelpunkt O und N den horizontalen Kreis n mit dem Mittelpunkt O_1, den wir in der Grundrißebene annehmen können. Da aber das Verhältnis

$$\frac{OM''}{O_1N''} = \frac{O_1M_1}{O_1N''} = \frac{O_1M'}{O_1N}$$

konstant ist, muß $M''N''$ durch einen festen Punkt R'' gehen, also scheidet MN eine feste Linie, die senkrecht zum Aufriß ist. Ebenso erkennen wir, daß MN eine zur trennenden Achse parallele feste Linie schneidet. Die auf die angegebene Weise erzeugte Fläche wird eine Normalfläche der beschriebenen Art, wenn die Kreise m und n nicht gleich groß sind. Der Kegel, von welchem die Fläche eine Normalfläche ist, hat seine Spitze in C in dem Mittelpunkt der Kugel, die man durch die Kreise m und n legen kann. Die Projektionen des Mittelpunktes dieser Kugel auf die vier singulären Erzeugenden liegen nämlich in einer Ebene mitten zwischen m und n. Die Ellipse k, welche die Grundrißkurve des Kegels bildet, liegt also in der Mitte zwischen m und n und ihre Halbachsen werden gleich der halben Summe und halben Differenz der Radien der gegebenen Kreise.

Aus der Betrachtung der Grundrißprojektion der Figur kann man sofort folgenden Satz der ebenen Geometrie ableiten: *Wenn zwei Punkte in der Ebene konzentrische Kreise mit gleich großen, aber entgegengesetzten Winkelgeschwindigkeiten durchlaufen, so ist ihre Verbindungslinie beständig normal zu einer festen Ellipse, deren Achsen die Summe und die Differenz von den Radien der gegebenen Kreise sind.*

Mit Hilfe der gefundenen Erzeugung der Normalfläche zeigt man leicht, daß die Zentralprojektion der Fläche aus einem beliebigen Punkt der Achse auf eine Ebene senkrecht zur Achse eine Ellipsenevolute bildet.

Weiter erkennt man, daß der Zylinder, den man der Fläche in irgendeiner Richtung senkrecht zur Achse umschreibt, hyperbolisch ist. Denn eine Ebene Π, welche die Erzeugende MN enthält und zu der gegebenen Richtung parallel ist, schneidet den Kreis m in einem neuen Punkt M_1, und die Ebene enthält dann auch die Linie M_1N; es hat aber MM_1 konstante Richtung, und da M und N Kreise mit gleich großen, aber entgegengesetzten Winkelgeschwindigkeiten durchlaufen, müssen M_1 und N sie mit gleichen und gleichgerichteten Geschwindigkeiten durchlaufen. Hieraus folgt, daß M_1N ein Umdrehungshyperboloid durchläuft (vorausgesetzt,

daß M_1N die Achse nicht schneidet), und da Π die Gerade M_1N enthält, wird sie eine Tangentialebene des Hyperboloids. Die gesuchte Zylinderfläche ist also einem Hyperboloid umschrieben, und deshalb hyperbolisch. *Die senkrechte Projektion der Normalfläche auf eine Ebene, die der Achse der Fläche parallel ist, wird demnach eine Hyperbel.*

317. Errichtet man in der Spitze eines gegebenen Kegels die Lote auf seinen Tangentialebenen, so entsteht ein neuer Kegel, den man den *Normalkegel* (Polarkegel) des ursprünglichen nennt. Dieser ist umgekehrt der Normalkegel von jenem. Eine beliebige Normalfläche des festen Kegels hat den andern Kugel zum Richtungskegel, und ihre Zentralebenen gehen alle durch die Spitze des Kegels hindurch. Die Striktionslinie der Normalfläche wird also die Berührungskurve eines umschriebenen Kegels, dessen Spitze in die Spitze des gegebenen Kegels fällt.

Dreizehntes Kapitel.

Schraubenflächen und topographische Flächen.

Allgemeine Schraubenflächen.

318. Eine *Schraubenfläche* wird von einer Kurve k erzeugt, die man um eine feste Achse schraubt. Die Schraubung ist durch die Achse, die Ganghöhe und den Schraubensinn vollständig bestimmt. Da jede der Schraubenlinien, die von den Punkten der erzeugenden Kurve beschrieben wird, sich bei der Schraubung in sich selbst verschiebt, kann man dasselbe von der ganzen Fläche sagen, so daß diese von jeder Kurve erzeugt werden kann, die alle Schraubenlinien trifft. Als besondere Kurven auf der Schraubenfläche merke man sich die *Grundkurven* (ebene Schnitte senkrecht zur Achse) und die *Meridiankurven* (ebene Schnitte durch die Achse). Bei einer abwickelbaren Schraubenfläche ist die Grundkurve eine Kreisevolvente, die Form der Meridiankurve haben wir ebenfalls bereits untersucht (288). Eine Schraubenfläche mit kreisförmiger Grundkurve heißt eine *gewundene Säule*.

Die Tangentialebene in einem beliebigen Punkt P der erzeugenden Kurve k bestimmt man durch die Tangenten von k und der von P beschriebenen Schraubenlinie (vgl. 203). Diese Bestimmung kann indessen nicht benutzt werden, wenn die genannten Tangenten zusammenfallen. Dieser Fall ist aber ausgeschlossen, wenn k eine Grundkurve oder Meridiankurve ist.

Längs jeder Schraubenlinie auf der Fläche kann man eine berührende abwickelbare Schraubenfläche legen, diese wird von allen auf der Schraubenlinie berührenden Tangentialebenen umhüllt. Diese abwickelbare Fläche kann insbesondere eine umschriebene Zylinderfläche werden.

319. Im folgenden nehmen wir an, daß die Fläche rechtsgängig ist, und eine Grundkurve g in der Grundrißebene liegt, die Achse a der Fläche also vertikal ist. Die Schnittkurve der Fläche mit irgendeiner schiefen Ebene kann man bestimmen, indem man

in der Ebene eine Reihe horizontaler Linien zieht, diese in die Grundrißebene niederschraubt, ihre Schnittpunkte mit g bestimmt und dann die gefundenen Schnittpunkte zurückschraubt.

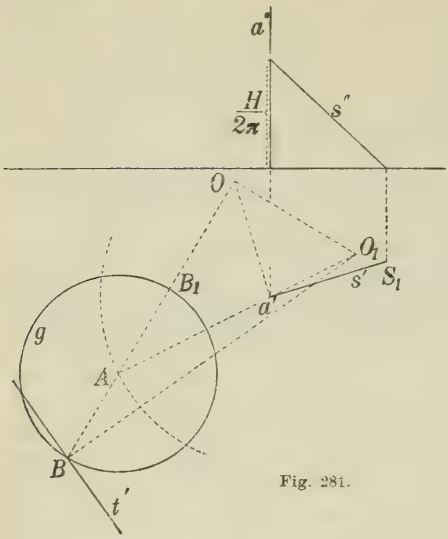


Fig. 281.

Die Berührungskurve einer der Schraubenfläche umschriebenen Zylinderfläche, deren Seitenlinien die Richtung s haben (Fig. 281), findet man durch Anwendung des früher bewiesenen Satzes über die Bahnnormalen bei der Schraubenbewegung (291). Da von allen Bahnnormalen, die senkrecht zu s sind, die Grundrißprojektionen durch O gehen ($a'O \perp a'S_1$), so gehen auch von den Normalen der Schraubenfläche in den Punkten der gesuchten Berührungskurve die Grundrißprojektionen durch O. Da gleichzeitig die Flächennormale in einem beliebigen Punkt sich im Grundriß als die Normale der Grundrißprojektion der durch den Punkt gehenden Grundkurve darstellt, so handelt es sich nur darum, aus O die Normalen auf die Grundrißprojektionen der Grundkurven zu fällen, die Fußpunkte dieser Normalen bilden dann die Grundrißprojektion der gesuchten Berührungskurve.

Ist g wie in Fig. 281 ein Kreis mit dem Mittelpunkt A, so liegen die Endpunkte B und B_1 des durch O gehenden Durchmessers auf der Grundrißprojektion der Berührungskurve k. Dreht man g um a' und zieht beständig den Durchmesser durch O, so wird die Grundrißprojektion der ganzen Berührungskurve bestimmt. Da AB konstante Länge hat, kann die Tangente t von k mit Hilfe des momentanen Drehpols O_1 leicht bestimmt werden.

Wenn g kein Kreis ist, kann man, nachdem B gefunden ist, die Tangente von k bestimmen, indem man für einen Augenblick g durch seinen Krümmungskreis in B ersetzt. Wenn man die Lote aus O auf die Grundrißprojektion der Grundkurve nicht leicht fällen kann, wählt man eine Reihe von Punkten auf g und zeichnet

die Normalen der Grundkurve in diesen Punkten. Darauf dreht man jeden der Punkte um a' so lange, bis die zugehörige Normale durch O geht. Die so gefundenen Punkte gehören dann alle zu der Grundrißprojektion der Berührungskurve.

320. Da der umschriebene Zylinder die durch die Punkte der Berührungskurve gehenden Grundkurven berührt, berührt seine Grundrißspur die Parallelprojektionen der Grundkurven auf die Grundrißebene in der Richtung s, und diese Projektionen kann man erzeugen, indem man sich g zusammen mit einem Kreis (mit dem Mittelpunkt a' und dem Radius $a'S_1$) bewegen läßt, wenn dieser Kreis auf einer Linie durch O parallel zu s' rollt (vgl. 290). Die Spur der Zylinderfläche wird so die Hüllkurve für die verschiedenen Lagen von g bei dieser Bewegung.

Gerade Schraubenflächen.

321. Eine Schraubenfläche, deren Erzeugende eine zur Schraubenachse a senkrechte Linie f ist, ist immer windschief. Nehmen wir (Fig. 282 a) die Achse vertikal an, so ist die horizontale Ebene eine Richtungsebene der Fläche, die Asymptotenebenen sind horizontal, die Zentralebenen vertikal, und die horizontale Projektion der Striktionslinie fällt mit dem Umriß der Fläche zusammen. Die Striktionslinie wird deshalb die von dem der Achse am nächsten gelegenen Punkt C von f beschriebene Schraubenlinie. Den Parameter CM für die Erzeugende f findet man folgendermaßen: die Normale in M soll einen Winkel von 45^0 mit der Grundrißebene bilden. Die Grundrißprojektion einer solchen Normalen muß durch einen Punkt O gehen, der so liegt, daß $a'O \parallel f'$ und $a'O = \frac{H}{2\pi}$ (gleich der *reduzierten Ganghöhe* h) wird (319). Die Horizontalprojektion der gesuchten Normale OM ist dann $\perp f''$, man sieht also, daß *der Parameter in allen Fällen*

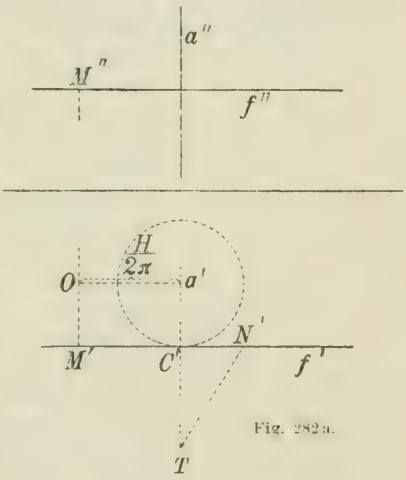


Fig. 282a.

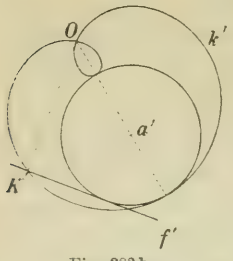


Fig. 282 b.

gleich der reduzierten Ganghöhe ist. Hieraus findet man leicht die Tangentialebenen in den verschiedenen Punkten von f. Trägt man $C'T = h \perp f'$ ab, so wird $\sphericalangle TN'C'$ gleich dem Winkel, den die Tangentialebene im Punkte N mit der Grundrißebene bildet.

Die Berührungskurve k einer umschriebenen Zylinderfläche bestimmt man durch direkte Anwendung der allgemeinen Methode (319). k' wird so die Fußpunktkurve des horizontalen Umrisses der Fläche. Man vergleiche Fig. 282 b, wo a' und O dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 281.

322. Wenn f die Achse a schneidet, wird die Fläche eine *Wendelfläche* (ein besonderes Konoid). k' wird dann ein Kreis und k eine Schraubenlinie. Dies erkennt man folgendermaßen (Fig. 283 a): k liegt auf einem Rotationszylinder mit der Grundfläche k', und wenn ein Punkt sich auf k von A bis B bewegt, so wird die Steigung $B'B$ dieselbe wie bei der Wendelfläche, während die Drehung um die Achse der Zylinderfläche doppelt so groß ist wie die Drehung der Erzeugenden f um a, denn der Zentriwinkel AMB' von k' ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $Aa'B'$. k ist also eine Schraubenlinie mit der Ganghöhe $\frac{1}{2}H$; die Wendelfläche enthält unendlich viele Schraubenlinien, deren Achse von a verschieden ist, indem *jeder Rotationszylinder durch a die Fläche in einer Schraubenlinie schneidet.*

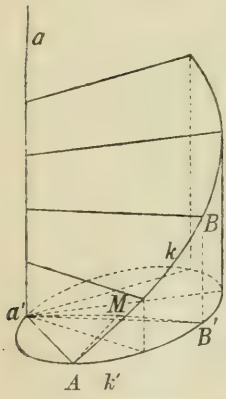


Fig. 283 a.

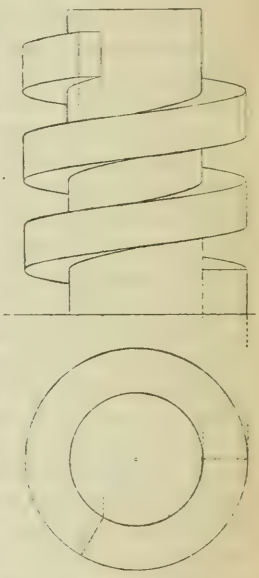


Fig. 283 b.

Die Wendelfläche kommt in der Praxis häufig vor, sie wird z. B. als Begrenzungsfläche für flachgängige Schrauben (Fig. 283 b) benutzt. Die vorspringenden Kanten der Stufen einer Wendeltreppe sind die Erzeugenden einer Wendelfläche, auch die Unter-

fläche einer Wendeltreppe ist gewöhnlich eine Wendelfläche. Schließlich wollen wir anführen, daß die Wölbung unter einer schrägen Brücke häufig aus Steinen gebildet wird, die die in Fig. 284 angegebene Form haben. Jeder Stein wird begrenzt von zwei Rotationszylinderflächen $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ mit der Achse a (der Achse der Wölbung) und vier Wendelflächen ABA_1B_1, CDC_1D_1, BCB_1C_1 und ADA_1D_1, alle mit der Achse a. Die Wölbung kann dann aus kongruenten Steinen gebaut werden, nur an den Stirn- und Kämpferflächen muß die Form verändert werden.

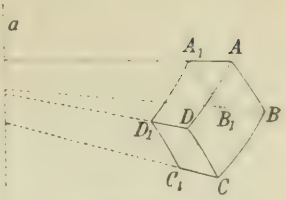


Fig. 284.

Schiefe Schraubenflächen.

323. Wenn man eine gerade Linie f um eine Achse a schraubt, die zu f weder parallel noch senkrecht ist, wird die erzeugte Fläche entweder abwickelbar oder windschief. Die Bedingung dafür, daß sie windschief wird, ist die, daß die Schraubenlinie, die der a am nächsten gelegene Punkt von f beschreibt, f berührt. In Fig. 285a, wo a vertikal und f eine Frontlinie ist, ist diese Bedingung nicht erfüllt, so daß die Fläche windschief wird. Der Richtungskegel der Fläche ist ein Rotationskegel mit vertikaler Achse, also ist die Asymptotenebene für f senkrecht zum Aufriß und die Zentralebene vertikal. Der Zentralpunkt wird der Punkt C von f, der a am

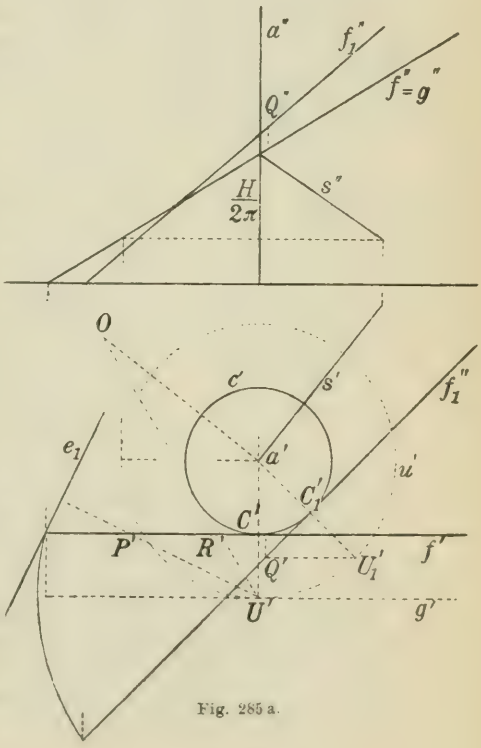


Fig. 285a.

nächsten liegt, die Tangentialebene in diesem Punkt wird nämlich durch f und die von C beschriebene Schraubenlinie bestimmt und ist mithin vertikal. Die Striktionslinie c ist daher die von C beschriebene Schraubenlinie. Man findet leicht neue Erzeugende der Fläche, indem man f um einfache Bruchteile eines Schraubenganges herumschraubt. In der Figur ist eine Erzeugende f_1 mit dem Zentralpunkt C_1 gefunden, indem f um $^1/_8$ Schraubengang herumgeschraubt wurde.

Man kann nun eine abwickelbare Schraubenfläche mit derselben Achse und derselben Ganghöhe wie die gegebene Fläche und mit einer Erzeugenden g, die parallel zu f ist und dieselbe Aufrißprojektion hat wie f, bestimmen. Der Abstand der Linie g von a ist gleich dem Radius der Grundfläche des Richtungskegels, wenn man die Höhe des Richtungskegels der reduzierten Ganghöhe gleich macht. Die so gefundene abwickelbare Fläche wird die *Asymptotenfläche* der gegebenen Fläche.

Statt das System fg um a so zu schrauben, daß f die gegebene Schraubenfläche und g die abwickelbare Schraubenfläche beschreibt, kann man auch g die abwickelbare Fläche durchlaufen und f so folgen lassen, daß die Linie des kürzesten Abstandes von a und g beständig f schneidet. Daraus folgt, daß *man die windschiefe Fläche dadurch erzeugen kann, daß man sich f mit einer vertikalen Ebene durch g fest verbunden denkt und diese Ebene auf einem vertikalen Zylinder rollen läßt, dessen Grundrißspur u' ist.* Alle Grundkurven der windschiefen Schraubenfläche sind also uneigentliche Kreisevolventen, deren Grundrißprojektionen dadurch erzeugt werden, daß alle Punkte von f' der Linie g' folgen, wenn diese auf u' rollt. Da die Flächennormale in einem Punkt dieselbe Grundrißprojektion hat wie die Normale der Grundrißkurve in diesem Punkt, sieht man, daß die Grundrißprojektionen der Flächennormalen längs f durch den Punkt U' gehen. Geht man zu einer anderen Erzeugenden f_1 über, so gehen die Grundrißprojektionen der Normalen durch einen neuen Punkt U_1'.

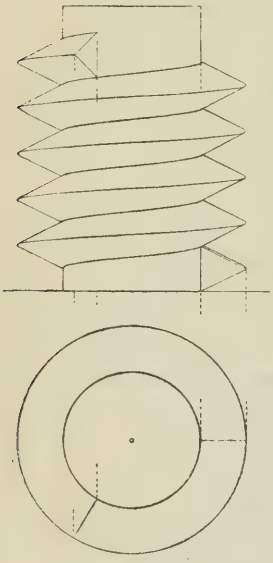


Fig. 285 b.

Die Tangentialebene im Punkte P von f kann man nun bestimmen: ihre

Grundrißspur e_1 geht durch die Grundrißspur der Erzeugenden und ist senkrecht zu der Grundrißprojektion $P'U''$ der Normalen in P. Da die Ebene ff'' eine Asymptotenebene ist, wird f'' eine Asymptote des Umrisses der Aufrißprojektion. Der Punkt Q'', in dem f_1'' den Umriß berührt, ist die Aufrißprojektion des Berührungspunktes Q der Ebene $f_1 f_1''$, und da die Normale von Q sonach eine Frontlinie ist, wird $Q'U_1'$ parallel zur trennenden Achse und Q läßt sich leicht bestimmen.

Scharfgängige Schrauben (Fig. 285 b) werden von schiefen Schraubenflächen begrenzt, deren Erzeugenden die Achse schneiden. Die Grundkurve einer solchen Fläche ist eine archimedische Spirale, d. h. eine Spirale, bei welcher die Zunahme des Radiusvektor der Drehung proportional ist.

324. Die Berührungskurve einer umschriebenen Zylinderfläche von der Richtung s ist der geometrische Ort der Punkte, deren Normalen senkrecht zu s sind, die Grundrißprojektionen dieser Normalen müssen also durch den Punkt O gehen, den man wie in Fig. 281 bestimmt. Der Punkt R von f, der mit zur Berührungskurve gehört, muß eine Normale haben, deren Grundrißprojektion durch U' und O geht, R' ist deshalb der Schnittpunkt von f' und $U'O$. Auf ähnliche Weise findet man Punkte der Berührungskurve auf den anderen Erzeugenden. In Fig. 286 ist die Grundrißprojektion der Berührungskurve näher bestimmt. Eine Linie l durch O schneide u' in A und A_1. Die zugehörigen Punkte von c' seien B und B_1, die Tangenten in diesen Punkten schneiden dann l in zwei Punkten P und P_1 der gesuchten Kurve. Der Mittelpunkt M von PP_1 liegt auf dem Kreis m über Oa' als Durchmesser. Hat man den Kurvenast gezeichnet, den P durchläuft, so kann man demnach leicht den von P_1 durchlaufenen Ast finden. Die Kurve wird von der Linie Oa' symmetrisch geteilt, und Q und R sind Scheitelpunkte der Kurve. P gelangt nach O, wenn B der Berührungspunkt einer Tangente aus O an c' wird. Wenn also O wie in der Figur außerhalb von c' liegt, bekommt die Kurve einen Doppelpunkt in O. Die Tangenten im Doppelpunkte findet man als die Grenzlagen der Linie l, wenn

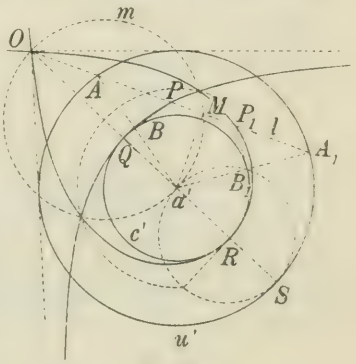


Fig. 286.

B sich einem der Schnittpunkte von m und c' nähert. Wenn P auf den Kreis m, aber nicht nach O fällt, fällt P_1 mit P zusammen, und die Kurve erhält dort wieder einen Doppelpunkt. Die so bestimmten Doppelpunkte findet man als die Schnittpunkte von m mit einem Kreis um den Mittelpunkt a', dessen Radius gleich $\sqrt{a'R \cdot a'S}$ ist. Unendlich ferne Punkte der Kurve findet man in den Richtungen, die durch die aus O an u' gelegten Tangenten gegeben werden.

Wenn O innerhalb von u' liegt (also s mit a einen kleineren Winkel bildet als f), enthält die Kurve keine unendlich fernen Punkte. Liegt O auf u', ist also s einer Erzeugenden der Fläche parallel, so löst sich die Kurve auf in eine gerade Linie p (die Grundrißprojektion der Erzeugenden, die s parallel ist) als geometrischen Ort von P und eine sogenannte *Strophoide* als geometrischer Ort für P_1. Die Strophoide wird aus O, p und dem Kreis m auf folgende Weise konstruiert (Fig. 287): Man nimmt einen Punkt P auf p an und schneidet OP mit m in M. Trägt man nun $MP_1 = PM$ ab, so findet man einen Punkt der gesuchten Kurve. Wenn P sich ins Unendliche entfernt, nähert sich M dem Punkt O, und der Abstand zwischen P_1 und p konvergiert nach $2OA$. Man findet deshalb eine Asymptote der Strophoide parallel zu p im Abstand $OH = AO$ von O.

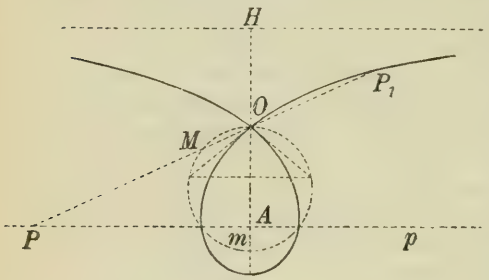


Fig. 287.

Topographische Flächen.

325. Bei der Darstellung eines kleineren Teiles der Erdoberfläche (einer *topographischen Fläche*) in einer Karte benutzt man ein einfaches Verfahren, indem man sich jeden Punkt durch seine Projektion auf eine horizontale Projektionsebene und durch eine beigeschriebene Zahl, welche die Höhe dieses Punktes über dieser Ebene angibt, die sogenannte *Kote*, bestimmt denkt. Zu jeder solchen Projektion (*kotierter Projektion*) gehört ein bestimmter Maßstab, mit dessen Hilfe alle Abstände der Karte zu messen sind. Eine gerade Linie kann durch die Projektionen und die Koten für zwei beliebige Punkte der Linie gegeben werden. Man kann

dann leicht die Kote für irgendeinen Punkt der Linie berechnen, wenn die Projektion des Punktes gegeben ist, ebenso kann man umgekehrt einen Punkt der Linie mit gegebener Kote bestimmen, indem man beachtet, daß für zwei beliebige Punkte der Linie ein konstantes Verhältnis zwischen dem Abstand der Projektionen und dem Höhenunterschied der Raumpunkte besteht. Dieses Verhältnis (der Tangens des Winkels, den die Linie mit der Vertikalen bildet) kann durch die Länge i des Stückes der Projektion angegeben werden, dem auf der Linie selbst der Höhenunterschied 1 entspricht, diese Länge i heißt das *Intervall* der Linie. Eine Projektion der Linie mit Angabe einer Reihe von Punkten, deren Höhen aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind, heißt der *Böschungs-* oder *Gefällmaßstab* (oder Maßstab) der Linie.

326. Eine beliebige Kurve wird angenähert durch ihre Projektion und die Koten für eine Reihe Punkte auf ihr dargestellt. In der Regel wählt man die Punkte so, daß zwei aufeinanderfolgende konstante Höhenunterschiede haben. In Fig. 288 ist eine Kurve k dargestellt, die in einer vertikalen Ebene liegt und deren horizontale Projektion deshalb eine gerade Linie k' ist; auf der Kurve sind gegeben die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7. Von dem Punkt A in der Höhe 1, der der Kurvenebene angehört, wollen wir eine Tangente an die Kurve ziehen. Dies können wir durch Umklappung ausführen; A gelange dabei nach A_1, k nach k_1, die gesuchten Tangenten bestimmt man dann durch graphische Konstruktion. Die Berührungspunkte sind in der Umklappung B_1, C_1, D_1 und E_1. Ohne Umklappung kann man die Aufgabe auf folgende Weise lösen. Durch A ziehen wir eine schräge Linie a. Wenn wir nun annehmen, daß die gesuchte Tangente t nicht horizontal ist, bestimmen a und t eine Ebene, deren horizontale Linien (*Höhenlinien*) a und t schneiden, und indem wir nun t als eine Sekante auffassen, die k in zwei einander nahe benachbarten Punkten schneidet,

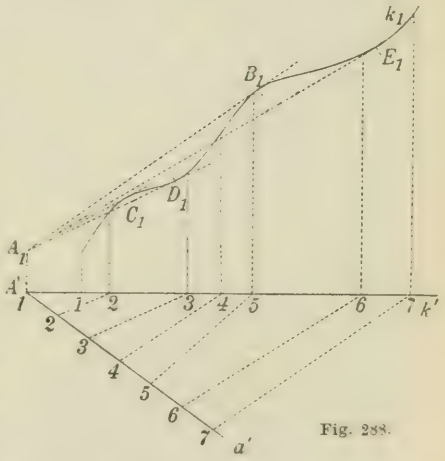


Fig. 288.

finden wir auch in der Ebene ta zwei einander nahe benachbarte Höhenlinien, die die Kurve schneiden. Man kann nun alle die Höhenlinien 1 1, 2 2, 3 3, . . ., die k und a schneiden, konstruieren, und es handelt sich darum, zu erkennen, wo zwei aufeinanderfolgende Linien nahezu parallel sind. Man erkennt aus der Figur, daß in der Nachbarschaft von 5 5 ein Übergang stattfindet zwischen Linien, die nach einer Seite, und solchen, die nach der anderen Seite konvergieren. Deshalb muß der gesuchte Punkt in der Nähe dieser Linie liegen. Weiter sieht man, daß 2 2 und 3 3 einander nahezu parallel sind, ebenso 6 6 und 7 7, so findet man die anderen Lösungen. Diese Methode kann man ohne wirkliche Ausführung der angegebenen Hilfskonstruktion anwenden, indem a durch einen beweglichen Maßstab ersetzt werden kann, und mit Hilfe eines Lineals kann man leicht ermitteln, welche der Linien 1 1, 2 2, 3 3 . . . in Betracht kommen.

327. Eine schiefe Ebene kann durch ihre Höhenlinien, die ja parallel sind und deren Projektionen also auch parallel werden, dargestellt werden. Zwei der Linien sind hinreichend zur Bestimmung der Ebene. Es ist indessen einfacher, die Ebene durch eine Fallinie darzustellen, also eine Linie, welche die Höhenlinien rechtwinklig schneidet. Der Gefällmaßstab der Fallinie heißt auch der *Böschungs-* oder *Gefällmaßstab* (oder Maßstab) der Ebene und bestimmt diese vollständig. Er wird zum Unterschied von der Darstellung der Geraden doppelt ausgezogen. Die Schnittlinien zweier Ebenen bestimmt man durch horizontale Hilfslinien. Dies kann man indessen nicht tun, wenn die Höhenlinien der Ebene parallel sind, aber in diesem Falle ist die Schnittlinie der Ebene, wenn sie überhaupt existiert, wieder eine Höhenlinie. Die Maßstäbe der Ebenen sind dann parallele und ähnliche Punktreihen, bei denen entsprechende Punkte gleiche Koten haben. Die Projektion der gesuchten Schnittlinie geht durch das Perspektivitätszentrum dieser Punktreihen hindurch.

Den Schnittpunkt einer geraden Linie mit einer Ebene findet man, indem man durch die Linie eine Hilfsebene legt. Sollen eine Linie und eine Ebene zueinander senkrecht sein, so müssen die Maßstäbe parallel sein und das Produkt der Maßzahlen der Intervalle = 1. Die Winkel, welche die Linie und die Ebene mit der Vertikalen bilden, sind nämlich komplementär und das Produkt ihrer Tangens also = 1.

328. Eine beliebige topographische Fläche wird durch eine Reihe *Höhenkurven* (*Niveaukurven*, d. h. Kurven, die durch Schnitte mit horizontalen Ebenen entstehen) dargestellt. Man wählt sie

gewöhnlich so, daß zwei aufeinanderfolgende Kurven konstanten Höhenunterschied haben. In Fig. 289 ist die Fläche durch die Höhenkurven 2, 3, 4, . . . dargestellt: es finden sich drei Punkte mit horizontalen Tangentialebenen, nämlich die Punkte 9 und 10, in denen die Fläche konvex ist, und der Punkt P mit der Kote 4, in dem die Fläche unkonvex ist, weswegen sie die Tangentialebene an dieser Stelle in der Kurve 4 schneidet. Die Schnittkurve der Fläche mit einer schiefen Ebene bestimmt man dadurch, daß man die Schnittpunkte der *Höhenkurven* der Fläche mit den ent-

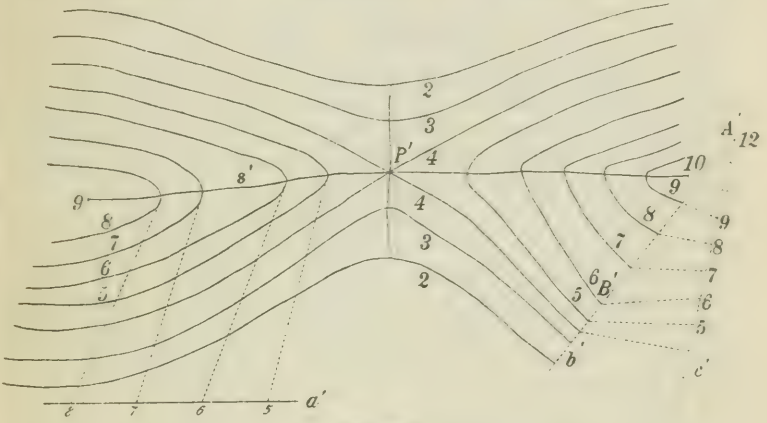


Fig. 289.

sprechenden *Höhenlinien* der Ebene sucht. Die Tangentialebene in einem beliebigen Punkt kann man bestimmen durch die Tangente der durch den Punkt gehenden Höhenkurve und die Tangente an einen beliebigen ebenen Schnitt durch den Punkt.

Linien stärksten Falles oder kurz *Fallinien* heißen die Kurven der Fläche, welche die Höhenkurven rechtwinklig schneiden (abgesehen von Punkten mit horizontalen Tangentenebenen, wo ein besonderes Verhalten eintreten wird). Ihre Projektionen müssen auch die Projektionen der Höhenkurven rechtwinklig schneiden. *Wasserscheide* (*Kammlinie*) heißt die Grenze zwischen Teilen, welche das Wasser nach benachbarten Vertiefungen senden. *Rinnlinie* (*Tallinie*[1]) heißt die Linie, der sich das Wasser bei seinem Fall mehr und mehr nähert.

---

1) F. v. Dalwigk, *Vorlesungen über darstellende Geometrie I*, Leipzig u. Berlin 1911, S. 357.

Um zu ermitteln, welche Teile der Fläche man von einem gegebenen Punkt A übersehen kann, muß man der Fläche einen Kegel mit der Spitze A umschreiben (Fig. 289), man legt dann einen vertikalen Schnitt b, dessen Ebene durch den Punkt A geht, durch die Fläche und zieht von A die Tangenten an b, wie wir es oben angegeben haben. So findet man jedesmal einen Punkt B der gesuchten Berührungskurve.

Soll man durch eine schräge Linie a eine Tangentialebene an die Fläche legen, so zieht man aus den Punkten 5, 6, 7, ... der Linie Tangenten an die zugehörigen Höhenkurven 5, 6, 7, ... und unter den so bestimmten Linien sucht man die auf, die mit ihren Nachbarlinien näherungsweise parallel sind. Jede der so bestimmten Linien liegt dann in der Nachbarschaft einer der gesuchten Tangentialebenen. Findet man insbesondere unter den genannten Linien eine, welche den Übergang von Linien, die nach einer Seite konvergieren, zu Linien, die nach der entgegengesetzten Seite konvergieren, bildet, so muß diese Linie in der Nachbarschaft einer der gesuchten Tangentialebenen liegen. Soll man an die Fläche eine Tangentialebene durch eine gegebene horizontale Linie a legen, so zieht man parallel zu a die Tangenten an die Höhenkurven, und an die von diesen Tangenten gebildete Zylinderfläche legt man die Tangentialebene durch a. Dies geschieht, indem man in einer vertikalen Hilfsebene die Tangenten durch die Spur von a an die Spur der Zylinderfläche zieht.

Über kotierte Projektionen und deren Anwendungen vergleiche man ferner:

G. A. V. Peschka, *Kotierte Ebenen und deren Anwendungen,* Brünn 1877. (Zweite Ausgabe 1882).

Chr. Wiener, *Lehrbuch d. darst. Geom.,* Bd. I, Leipzig 1884. S. 25 (Historisches) u. S. 100—103, Bd. II, Leipzig 1887, S. 388—402.

J. de la Gournerie, *Discours sur l'art du trait,* Paris 1855; *Géométrie descriptive,* Seconde Edition, 1ère partie, Paris 1873, Liv. III, 3ème partie, Paris 1864, Liv. X.

M. d'Ocagne, *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale,* Paris 1896, Chap. I.

Fr. Schilling, *Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie,* Leipzig u. Berlin 1904, S. 58—64.

Rohn-Papperitz, *Lehrb. d. darst. Geom.,* 3. Aufl. Leipzig 1906, III, S. 289.

R. Rothe, *Darstellende Geometrie des Geländes* (Math. Bibl., hrsg. v. Lietzmann u. Witting, XIV). Leipzig u. Berlin 1914.

Vierzehntes Kapitel.

Die Beleuchtung der Flächen.

Schattenkonstruktionen.

329. Um das Bild eines Gegenstandes anschaulich darzustellen, denkt man sich oft den Gegenstand beleuchtet (in der Regel durch parallele Lichtstrahlen) und stellt in der Zeichnung die Wirkungen dar, die diese Beleuchtung hervorbringt. Die erste und wichtigste dieser Wirkungen ist die, daß die Oberfläche des Gegenstandes in einen beleuchteten und einen unbeleuchteten Teil zerfällt. Die Grenze zwischen den beiden Teilen, die *Eigenschattenlinie*, ist bei konvexen Körpern die Berührungskurve eines umschriebenen Kegels, dessen Spitze im Ausgangspunkt der Lichtstrahlen liegt, oder eines umschriebenen Zylinders, wenn die Lichtstrahlen parallel sind.

Der Teil des Raumes, der von den Verlängerungen aller der Lichtstrahlen ausgefüllt wird, die von der Oberfläche des Körpers aufgefangen werden, bestimmt den *Schattenraum* des Körpers, und wenn eine Ebene (oder eine andere Fläche) diesen Schatten durchsetzt, entsteht ein sogenannter *Schlagschatten* des Körpers auf der Ebene (oder Fläche). Bei einem unkonvexen Körper können einzelne Teile von diesem ihren Schlagschatten auf andere Teile des Körpers werfen. Auch die Randkurve einer Fläche kann den Schatten auf die Fläche selbst werfen.

330. Bei der Darstellung in Grund- und Aufriß benutzt man oft mit Vorteil eine Strahlenrichtung, deren Projektionen beide einen Winkel von 45^0 mit der trennenden Achse bilden, das Licht denkt man sich von vorne oben links kommend. Die Lichtstrahlen fallen dann in die Richtung der einen Diagonale eines Würfels, dessen Seitenflächen den Projektionsebenen parallel sind, und auch die Seitenrißprojektion bildet einen Winkel von 45^0 mit der trennenden Achse. Die Lichtstrahlen sind parallel zu der Halbierungsebene I des von den positiven Teilen der Grund- und Aufrißebene gebildeten Winkels. Die Lichtstrahlenebene für eine Linie a,

die parallel zu I ist, wird ebenfalls parallel zu I, und der Schatten von a auf irgendeiner Fläche hat Projektionen, die zu der Symmetrieachse der Projektionen a' und a'' symmetrisch sind (43).

Sucht man z. B. den Schatten einer Linie a, die zur trennenden Achse parallel ist, auf einer vertikalen Zylinderfläche mit der Grundrißspur k (Fig. 290), so konstruiert man die Aufrißprojektion a_1'' des Schattens symmetrisch zu k bezüglich der Linie s, die in der Mitte zwischen a' und a'' verläuft. Die Schatten b_1 und c_1, von zwei Linien b und c, von denen die erste senkrecht zur Aufrißebene, die zweite senkrecht zur Grundrißebene ist, werden im Aufriß durch die zwei geraden Linien b_1'' und c_1'' dargestellt.

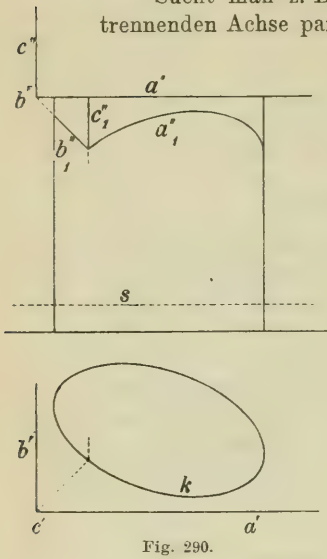


Fig. 290.

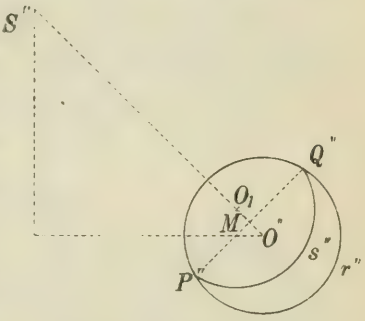
Den Schatten einer beliebigen Kurve, die in der Frontebene durch a liegt, kann man dadurch finden, daß man von a_1'' aus die senkrechten Abstände der Kurvenpunkte von a in der wahren Größe abträgt. Den Schatten einer Kurve, der in einer beliebigen vertikalen Ebene liegt, kann man auf ähnliche Weise finden, indem man zuerst den Schatten einer Linie der Ebene, die parallel zu I ist, bestimmt.

331. Wenn eine Fläche von einer Randkurve r begrenzt ist, die einen Schatten s auf die Fläche wirft, so ist es von besonderer Bedeutung, die Punkte von s zu finden, die auf r fallen, und darauf die Tangenten des Schattens in diesen Punkten zu bestimmen. Die Punkte selbst findet man daraus, daß ihre Tangentialebenen durch den leuchtenden Punkt gehen müssen, sie gehören also mit zu der Eigenschattenlinie der Fläche. Ist die Fläche eine Kegelschnittfläche und die Kurve r eben, so kann man die gesuchten Punkte finden als die Schnittpunkte von r und der Polarebene des leuchtenden Punktes, oder: Durch die Spitze des längs r umschriebenen Kegels legt man einen Lichtstrahl, und aus dessen Spur in der Ebene von r zieht man die Tangenten an r, die Berührungspunkte sind dann die gesuchten Punkte.

Um die Tangente des Schlagschattens in einem der gefundenen Punkte zu bestimmen, benutzt man folgenden Satz: *Die Tangen-*

ten der Randkurve und ihres Schlagschattens sind mit dem Lichtstrahl und der in dem betreffenden Punkte an die Eigenschattenlinie gezogenen Tangente harmonisch verbunden. Wir wollen den Beweis dieses Satzes nur unter der Voraussetzung führen, daß die Fläche eine Kegelschnittfläche ist. In diesem Falle entsprechen r und s einander in einer involutorischen perspektiven Kollineation, deren Zentrum der leuchtende Punkt und deren Kollineationsebene die Polarebene dieses Punktes bezüglich der Fläche ist. Der Satz folgt dann daraus, daß die Tangenten von r, s in dem betrachteten Punkt einander entsprechen, und die Tangente der Eigenschattenlinie in der Kollineationsebene liegt.

In Fig. 291 ist eine Paraboloidkalotte dargestellt, deren Achse OA senkrecht auf der Aufrißebene steht und deren horizontale Meridiankurve m ist. Die Kalotte wird von dem Parallelkreis r begrenzt. Wir beleuchten sie durch Strahlen, deren Projektionen einen Winkel von 45^0 mit der trennenden Achse bilden, und suchen den Schlagschatten s der Randkurve. Der Kegel, der das Paraboloid längs r berührt, hat die Spitze $T(AT = OA)$. Der Lichtstrahl durch T schneide die Ebene der Randkurve in S. Die Polare von S bezüglich r geht durch die beiden Punkte P und Q, in denen der Schatten beginnt. Da die Polarebene des leuchtenden unendlich fernen Punktes senkrecht zur Aufrißebene ist und die Linie PQ enthält, ist $P''Q''$ die Aufrißprojektion der Tangenten der Eigenschattengrenze in P und Q. Aus dem Satz über die Tangente des Schlagschattens folgt dann, daß die Tangenten von s'' in P'' und Q'' bezüglich der Achse $P''Q''$ symmetrisch zu den Tangenten von r'' in denselben Punkten sind. Da nun gleichzeitig s ein Kegelschnitt ist und seine Aufrißprojektion ein Kreis wird, ist s'' ein Kreis, der zu r'' bezüglich $P''Q''$ symmetrisch ist.



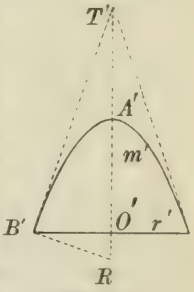


Fig. 291.

Ist O_1 das Zentrum von s'', so hat man:

$$O''O_1 = 2 \cdot O''M = 2\,\frac{(O''P'')^2}{O''S''} = 2\,\frac{(O'B')^2}{O'T\sqrt{2}} = O'R \cdot \sqrt{2}\,,$$

indem $B'R$ die Normale von m' in B' bezeichnet. Hierdurch kann man O_1 leicht bestimmen und s'' sofort zeichnen.

332. Zur Konstruktion des Schlagschattens einer Kugel auf eine Ebene kann man benutzen, daß die Brennpunkte der Schlagschattengrenze, die natürlich ein Kegelschnitt wird, die Schlagschatten der Endpunkte des auf der Ebene senkrechten Kugeldurchmessers werden. Man sieht nämlich sofort, daß von dem Schlagschatten der Kugel auf eine Tangentialebene der eine Brennpunkt in dem Berührungspunkt der Tangentialebene liegt, und wenn die Ebene parallel verschoben wird, wird der Schlagschatten ähnlich und ähnlich liegend zu dem ursprünglichen.

Eine ausführliche Behandlung der Schattenkonstruktionen mit vielen praktischen Anwendungen findet man in dem Werke:

J.-J. Pillet, *Traité de perspective linéaire.* Paris 1901, 1ère partie.

Man vergleiche ferner, außer den früher zitierten Lehrbüchern:

Emil Müller, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie I.* Leipzig 1908.

J. Hempel, *Schattenkonstruktionen.* Leipzig 1906.

K. Volland, *Technische Schattenkonstruktionen.* Leipzig 1909.

Beleuchtungslinien.

333. Wir denken uns den Raum durch parallele Lichtstrahlen so beleuchtet, daß eine Ebene senkrecht zur Strahlenrichtung eine gleichmäßige Beleuchtung erhält. Die Beleuchtung, die man in einem beleuchteten Punkte der Fläche findet, ist dann proportional dem Kosinus des spitzen Winkels α zwischen dem Lichtstrahl und der Normalen der Fläche in dem Punkte. Die Zahl $i = 100 \cdot \cos \alpha$ heißt die Beleuchtungszahl in dem betrachteten Punkt. Der Teil der Fläche, der unbeleuchtet bleibt, wenn jede andere Beleuchtung als die gegebene ausgeschlossen ist, wird in Wirklichkeit von den zurückgeworfenen Lichtstrahlen bestrahlt, und man pflegt deswegen diesem Teil der Fläche eine Beleuchtungszahl zuzuschreiben, die einer Strahlenrichtung entgegengesetzt der gegebenen und einer halb so großen Lichtstärke wie die gegebene entspricht. In dem Punkte, wo der Winkel der Normalen mit der dem Lichtstrahl entgegengesetzten Richtung der spitze Winkel α ist, setzt man also die Beleuchtungszahl $= 50 \cdot \cos \alpha$.

Eine Kurve, die alle Punkte der Fläche mit gleicher Beleuchtung enthält, heißt eine *Beleuchtungslinie* oder *Isophote*. Die Beleuchtungslinie ist also der geometrische Ort für die Punkte der Fläche, deren Normale einen gegebenen Winkel mit der Lichtrichtung bildet.

Ist die Fläche eine Kugel, so erfüllen die Normalen, die einen gegebenen Winkel α mit der Lichtrichtung bilden, einen Rotationskegel, dessen Achse der durch den Mittelpunkt gehende Lichtstrahl ist, und dieser Kegel schneidet den beleuchteten Teil der Kugel in einem kleinen Kreis, der sonach die der Beleuchtungszahl $100 \cdot \cos \alpha$ entsprechende Linie wird. Die Beleuchtungszahl 100 findet man nur in einem Punkte, nämlich da, wo der Lichtstrahl durch den Mittelpunkt den beleuchteten Teil der Kugel schneidet. Teilt man den nach diesem Punkt hingehenden Radius in zehn gleich große Teile, dann schneiden die durch die Teilpunkte senkrecht zu dem Radius gelegten Ebenen die Kugel in den Beleuchtungslinien 10, 20, . . . 90. Die Beleuchtungslinie 0 ist die Eigenschattengrenze.

Die Beleuchtungslinien auf den abwickelbaren Flächen sind Gerade.

334. Auf dem *vertikalen Rotationszylinder*, dessen Grundrißspur k ist (Fig. 292), kann man die Beleuchtungslinien dadurch finden, daß die Punkte von k dieselbe Beleuchtung auf dem Zylinder haben müssen wie auf der Kugel, von welcher k ein größter Kreis ist. Man kann die Konstruktion deshalb folgendermaßen ausführen: Durch den Mittelpunkt O von k zieht man den Lichtstrahl s mit der Grundrißprojektion s'. Den Lichtstrahl legt man um s' in die Grundrißebene um als s_n und den Radius OS von k, der auf s_n fällt, teilt man in zehn gleich große Teile. In jedem der Teilpunkte, z. B. in A_n, errichtet man ein Lot auf s_n und in dessen Schnittpunkt A_1 mit s' wieder ein Lot auf s' bis zum Schnitt mit k. Von diesen Punkten ist dann die Beleuchtung bekannt. So haben in Fig. 292 die Punkte B, C die Beleuchtung 30.

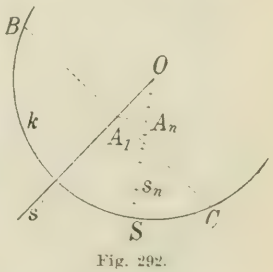


Fig. 292.

Die Beleuchtungslinien auf einem *beliebigen vertikalen Zylinder* bestimmt man, indem man zuerst die Beleuchtungslinie auf dem vertikalen Rotationszylinder sucht, dessen Grundkreis k den Radius $OS = 100$ mm $\cdot \cos(s's)$ hat, wodurch man erreicht, daß der Abstand OA_1 in Millimetern gemessen sofort die Beleuchtungszahl für B und C angibt. Darauf benutzt man, daß die Berührungslinien für parallele Tangentialebenen der beiden Zylinder dieselbe Beleuchtung haben.

335. *Die Beleuchtungslinien eines Rotationskegels* (Fig. 293)

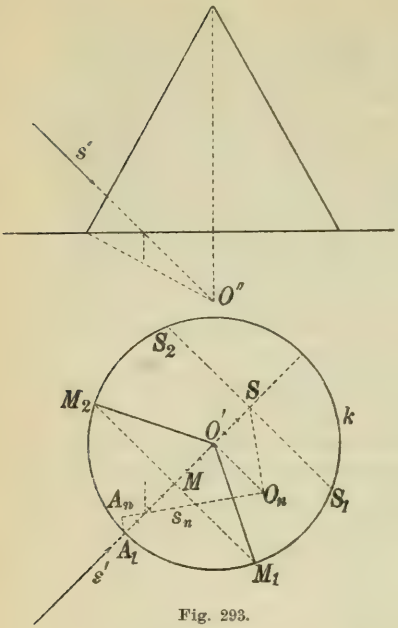


Fig. 293.

kann man mit Hilfe einer Kugel finden, welche den Kegel längs des Grundkreises k berührt. In den Punkten, die auf k liegen, haben nämlich Kugel und Kegel dieselbe Beleuchtung. Klappt man den durch den Kugelmittelpunkt O gehenden Strahl s in die Grundrißebene um, so falle er nach s_n. Auf s_n trage man $O_n A_n$ gleich dem Kugelradius ab. Die Senkrechten auf $O_n A_n$ mögen s' in S und A_1 schneiden, dann teile man SA_1 in zehn gleiche Teile, in jedem Teilpunkt, z. B. in M, errichte man ein Lot auf s' bis zum Schnitt mit k (in M_1 und M_2). In diesen Punkten ist dann die Beleuchtung bekannt und die Seitenlinien des Kegels durch M_1 und M_2 sind die zu dieser Beleuchtungszahl gehörenden Beleuchtungslinien. S_1 und S_2 haben die Beleuchtung 0, OS_1 und OS_2 bilden also die Eigenschattengrenze. Diese Punkte kann man auch direkt bestimmen, indem man durch die Spitze des Kegels einen Lichtstrahl zieht und durch dessen Grundrißspur die Tangenten an k legt, die Berührungspunkte dieser Tangenten sind dann S_1 und S_2.

336. Auf einer *Umdrehungsfläche mit vertikaler Achse* (Fig. 294) kann man die Beleuchtungslinien finden, indem man eine Hilfskugel mit dem Mittelpunkt O in der Aufrißebene und mit dem Radius $= 100\,\text{mm} \cdot \cos(s''s)$ einführt, wobei s den Lichtstrahl durch O bedeutet. s klappt man um s'' in die Aufrißebene um als s_n und trägt auf s'' 100 mm ab. Die Projektion dieser Strecke auf s_n bestimmt den Radius der Kugel. Auf der Umdrehungsfläche wählen wir einen Parallelkreis k aus und suchen z. B. die Punkte auf k, die die Beleuchtungszahl x haben. k gehe durch den Punkt M des Hauptmeridians, und dessen Tangente in M sei MT, die Normale MN. Auf der Hilfskugel suchen wir einen entsprechenden Kreis k_1, indem wir den Radius OM_1 parallel zu MN zeichnen. Die Tangentialebenen der Kugel längs k_1 sind dann parallel zu den Tangentialebenen der Umdrehungsfläche längs k. Trägt man

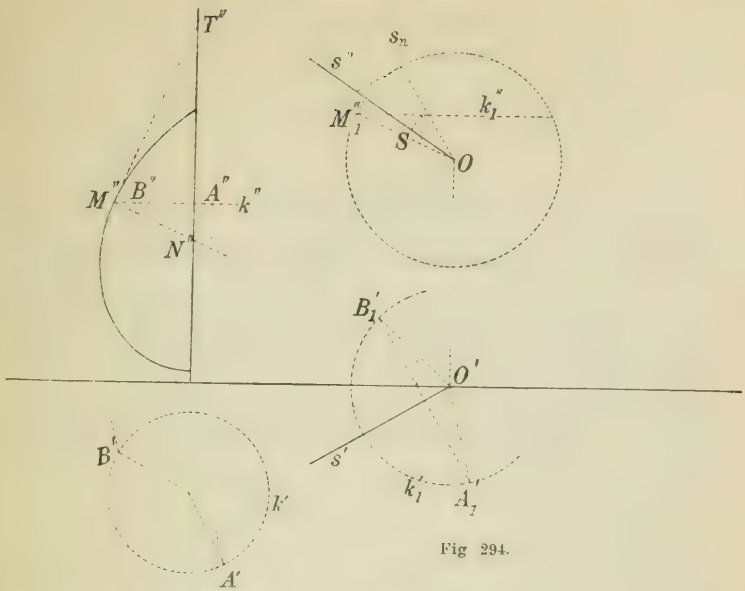


Fig 294.

nun auf s'' die Strecke $OS = x$ mm ab, so schneidet eine Ebene durch S senkrecht zu s den Kreis k_1 in zwei Punkten A_1 und B_1 mit der Beleuchtungszahl x, und zieht man NA und NB parallel zu OA_1 und OB_1, so gelangt man zu den gesuchten Punkten A und B auf k.

Näheres über die Theorie und zeichnerische Anwendungen der Beleuchtungslinien findet man in folgenden Arbeiten:

L. Burmester, *Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen,* Leipzig 1871. Zweite Ausgabe 1875.

Fr. Tilšer, *Die Lehre der geometrischen Beleuchtungskonstruktionen,* Wien 1862.

E. Koutny, *Theorie der Beleuchtung krummer Flächen vom 2. Grade bei parallelen Lichtstrahlen,* Brünn 1867.

R. Niemtschik, *Direkte Beleuchtungskonstruktionen usw.* (Sitzungsberichte der Wiener Akad., Math.-phys. Kl. Bd. 57. S. 678). 1868.

D. Tessari, *La teoria delle ombre e del chiaroscuro*, Turin 1878—80.

J.-J. Pillet, *Traité de perspective linéaire,* Paris 1901, 2 ème partie.

Chr. Wiener, *Lehrb. d. darst. Geom. I,* Leipzig 1884, S. 390ff

Literaturverzeichnis.

Neuere Werke in deutscher Sprache über darstellende Geometrie.

K. Rohn und E. Papperitz, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie.* Leipzig, Veit. I. Band, 4. Aufl., 1912. II. u. III. Band, 3. Aufl., 1906.

Chr. Wiener, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie.* 2 Bände. Leipzig, Teubner 1884.

W. Fiedler, *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage.* Leipzig, Teubner. 3. Aufl. 1883—88. I. Teil, 4. Aufl. 1904.

G. A. V. Peschka, *Darstellende und projektive Geometrie.* Wien, Gerold 1882—1885. Neue Aufl., I. Bd. Leipzig u. Wien 1899.

E. Müller, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie.* I. Band. Leipzig, Teubner 1908. Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie (Bautechnische Beispiele). 4 Hefte. Leipzig u. Wien, Deuticke 1910—11.

G. Loria, *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, deutsch von F. Schütte. Leipzig, Teubner. I. Band 1907. II. Band 1912.

F. v. Dalwigk, *Vorlesungen über darstellende Geometrie.* I. Band. Leipzig, Teubner 1911.

G. Hauck, *Vorlesungen über darstellende Geometrie.* I. Band. Leipzig, Teubner 1912.

Th. Schmid, *Darstellende Geometrie.* I. Band (Sammlung Schubert LXV). Leipzig, Göschen 1912. Maschinenbauliche Beispiele für Konstruktionsübungen zur darstellenden Geometrie. Leipzig, Göschen 1911.

J. Schröder, *Darstellende Geometrie.* I. Teil: Elemente (Sammlung Schubert XII). Leipzig, Göschen 1901.

Kürzere Darstellungen:

Chr. Beyel, *Darstellende Geometrie.* Mit 1800 Dispositionen zu Aufgaben. Leipzig, Teubner 1901.

A. Schoenflies, *Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden.* Leipzig, Teubner 1908.

M. Großmann, *Einführung in die darstellende Geometrie.* 2. Aufl. Basel 1912.

F. Schilling, *Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie.* Leipzig, Teubner 1904.

R. Haußner, *Darstellende Geometrie* (Sammlung Göschen). Leipzig, Göschen. I. Teil 1902, II. Teil 1908.

Den Bedürfnissen der mittleren Fachschulen entsprechen:

J. Schlottke, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie.* 3. Aufl. Leipzig, Degener, o. J. I. Spezielle darst. Geom. II. Schatten- und Beleuchtungslehre. III. Perspektive. IV. Projektive Geometrie.

E. Geyger, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie.* Leipzig, Göschen 1906.

W. Eggers, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie.* Leipzig, Seemann & Co. I. Teil, 3. Aufl. 1906, II. Teil, 2. Aufl. 1910. (Sehr viele Aufgabenbeispiele.)

M. Bernhard, *Darstellende Geometrie.* Stuttgart, Enderlen. 3. Aufl. 1909.

J. Vonderlinn, *Darstellende Geometrie für Bauhandwerker.* 2 Teile. Stuttgart, J. Maier 1894.

A. Kirschke, *Die darstellende Geometrie des Maschinentechnikers.* Leipzig, Seemann & Co. 1912.

Gubatz, Lüdeke und Weigel, *301 Aufgaben aus der darstellenden Geometrie für Maschinenbauer.* Leipzig, Seemann & Co. 1900.

Zusätze.

Zu 161. Die zu dem Umlauf AB in Fig. 152 gehörende Halbtangente in P muß mit dem Halbstrahl AB gleichgerichtet sein; es müßten sonst die Bögen PA und PB außer P noch einen Punkt gemein haben.

Zu 171, 172. Daß die Parallelkurve keinen Doppelpunkt besitzt, d. h. daß P nicht dieselbe Lage Q zweimal passieren kann, ergibt sich daraus, daß die Parallelkurve nicht zwei verschiedene Bögen mit denselben Endpunkten Q,R enthalten kann; es müßten sonst diese Bögen je eine zu QR parallele Tangente haben, und das ist unmöglich, weil der Normbogen keine zwei parallelen Tangenten hat.

Zu 172. Man könnte hier den folgenden allgemeineren Satz aufstellen: *Wenn für jeden von A verschiedenen Punkt M eines Bogens AB der entsprechende Bogen MB ein einfacher Bogen ist, dessen Totalkrümmung $< \alpha < 180^0$, so ist der ganze Bogen AB ein einfacher Bogen.* Daß A kein Doppelpunkt ist, geht aus dem vorigen Zusatz hervor. Da ferner zwischen A und M auf dem Bogen AM ein Punkt N existiert, dessen Tangente der Linie AM parallel ist, und da die Richtung dieser Tangente, wenn M nach A konvergiert, monoton variiert und ihr Drehungswinkel immer $< \alpha < 180^0$ ist, so wird sie einer bestimmten Grenzrichtung zustreben. Da aber die Linie AM sich derselben Richtung nähern muß, folgt hieraus, daß unser Bogen in A eine bestimmte Tangente hat, und gleichzeitig, daß die Tangente längs des ganzen Bogens AB monoton variiert.

Zu 163, 259, 263, 264. *Wenn ein Bogen AB so beschaffen ist, daß 1. von jedem seiner Endpunkte A, B ein einfacher Bogen ausgeht, welcher dem gegebenen Bogen angehört, und 2. von jedem andern Punkte M des Bogens zwei einfache Bögen ausgehen, welche dem gegebenen Bogen angehören und auf verschiedenen Seiten von M liegen, so läßt sich der Bogen AB in eine endliche Anzahl von einfachen Bögen zerlegen.* In der Tat denken wir uns von A ausgehend der Reihe nach die möglichst großen einfachen Bögen AM_1, M_1M_2, ... auf dem Bogen AB abgetragen, so würde die Annahme einer unendlichen Anzahl solcher Bögen die Existenz eines Grenzpunktes P der Reihe $M_1, M_2, \ldots$ nach sich ziehen, und es wäre dann unmöglich, von P aus auf dem Bogen PA einen einfachen Bogen abzutragen, was unseren Voraussetzungen widerspricht.

Sachregister.

(Die Zahlen bedeuten die Seiten.)

A.

Abstand eines Punktes von einer Ebene 11, eines Punktes von einer Geraden 33, zweier Geraden 4, 35, zweier Punkte 2, 48, 52, 60
Abwickelbare Fläche 234, mit zwei Parabeln als Leitkurven 261
Abwickelung einer Pyramide 23, 24, eines Kegels 24, 240, eines Prismas 25, eines Zylinders 26, einer Schraubenfläche 257
Achsen einer Kegelschnittfläche 202, 205
Achsenkonstruktion bei der Ellipse 114, 128, bei der Hyperbel 122, 128, bei der Parabel 117, 128
Ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen 117, Punktreihen 80
Affinität in der Ebene 37, im Raume 78
Algebraische Kurve 156
Analytische reguläre Kurve 156
Astroide 173
Asymptote, (Allgemeines) 141, 176, einer Hyperbel 105, 107, einer Konchoide 143, einer Strophoide 300, eines ebenen Schnitts einer Umdrehungsfläche 183, 189, der Abwickelung einer ebenen Schnittkurve eines Kegels 241, der Durchdringungskurve zweier Kegel 249, der Meridiankurve einer abwickelbaren Schraubenfläche 256, des Umrisses einer windschiefen Fläche 275, 276, des Umrisses eines Zylindroids 283, des Umrisses eines schiefen Durchgangs 285
Asymptotenkegel einer Umdrehungsfläche 180, eines Hyperboloids 186, 203, 204, 208, 218, einer windschiefen Fläche 276
Asymptotenfläche einer windschiefen Fläche 276, einer schiefen Schraubenfläche 298
Axonometrie, allgemeine 42, orthogonale 50
Axonometrische Methode und ihre Bedeutung 47.

B.

Beleuchtungslinien einer Kugel 308, eines Rotationskegels 309, eines Zylinders 309, einer Umdrehungsfläche 310
Biais passé (Schiefer Durchgang) 283.
Brennkurve 174
Brennpunkt einer Ellipse 17, 102, einer Hyperbel 104, einer Parabel 105
Brennstrahlen 17, 105, 107
*Brianchon*scher Satz bei dem Kreis 98, bei Kegelschnitten 110.

C.

Charakteristiklinie bei allgemeinen Hüllflächen 263, bei Kanalflächen 264.

D.

*Desargues*scher Satz 71
Doppelpunkte einer Involution 91, 93, zweier projektiven Punktreihen 88, 89, einer ebenen

Schnittkurve eines Kreisrings 192, der Durchdringungskurve zweier Kegel 244, 245, der Projektion eines einfachen Bogens 222, der Projektion der Schnittkurve zweier Kegelflächen 247, der Projektion der Schnittkurve einer Kegelfläche und einer Kugel 251
Doppelstrahlen zweier Strahlenbüschel 89, einer Strahleninvolution 93
Doppelte Erzeugende eines Konoids 280, Erzeugung zyklischer Kurven 170, Projektion 18
Doppelverhältnis 64
Drehung um eine Achse 2, 20, 36
Dreikantskonstruktionen 12
Dualitätsprinzip 98, 201
Durchdringung von Polyedern 27, von Kegelflächen 241—249, einer Kegelfläche mit einer anderen Fläche, insbesondere einer Kugel, 249—252, zweier Kegel mit gemeinsamer Spur 246, zweier Umdrehungsflächen 232

E.

Ebener Schnitt eines Polyeders 23, einer Pyramide 23, eines Kegels 24, 101, 240, einer Kugel 26, der Tangentenfläche einer Raumkurve 225 ff., einer Umdrehungsfläche 182, einer abwickelbaren Fläche 235, einer Schraubenfläche 293
Eigenschattenlinie (*-grenze*) 305, 307, 309
Einfacher Bogen in der Ebene 137, im Raum 219
Einfache Kurve in der Ebene 138, 314, Kurve im Raume 227, 314, Projektion 1
Elementares Flächenstück 176
Ellipse als Kreisprojektion 15, als ebener Schnitt eines Rotationskegels 101, als perspektive Figur eines Kreises 115, 116, 128
Ellipsenkonstruktionen 113—116
Ellipsenquadrant als Normbogen 155
Ellipsoid 202, 209—211, 217
Epi- und Hypozykloide 168—171
Euler-Savarysche Konstruktion 165
Evolute eines Normbogens 145, 148, 149, einer Normkurve 154, einer zyklischen Kurve 171, einer Ellipse 156, 291
Evolvente 157, 158

F.

Fallinien einer Ebene 5, 302, einer Fläche 303
Flachgängige Schrauben 296
Fluchtebene 76
Fluchtlinie einer Ebene 58
Fluchtlinien einer Kollineation 71, 72
Fluchtpunkt 58
Frontlinie u. *-ebene* 2, 20, 21
Fußpunktkurven 174

G.

Ganghöhe einer Schraubenlinie o. Schraubenbewegung 253
Gefällmaßstab 301, 302
Gegenpunktkurve 174
Gemeinsame Tangenten einer Hyperbel und eines konzentrischen Kreises 191
Geodätische Kurve einer abwickelbaren Fläche 239
Geradlinige Kegelschnittflächen 197, 207
Gesimsfläche 287
Gewundene Säule 293
Grundachse 19
Grundkurve einer Schraubenfläche 293

H.

Halbtangente 135, 141, 175
Harmonische Punkte und Strahlenpaare 66, 67, Kollineation (Perspektive) 72, 77
Hauptlinien in dem Bilde einer Fläche 178
Hauptnormale einer Raumkurve 230, einer Schraubenlinie 254
Haupttangentialebene 274
Hauptumklappung 2
Hüllflächen 262
Hüllkurven 172

Hyperbel als Schnitt eines Rotationskegels 103, als perspektive Figur eines Kreises 128
Hyperbelkonstruktionen 106, 107, 120—123, 128
Hyperboloid 203, 207, 208, 211, 212, 218, 268, 277, 278
Hyperboloidverzahnung 189

I.

Involutionen 89, auf dem Kreis 92, 93
Involutorische Perspektive (Kollineation) 72, 77, Reihe 90
Involutorischer Büschel 92, 93

K.

Kanalflächen 264
Kavalierperspektive 48
Kegelfläche 6—8, einer anderen Fläche umschrieben 178, 261, 263, einer Umdrehungfläche umschrieben 264
Kegelschnitt 101—108, als Zentralprojektion eines Kreises 108—113, 123
Kegelschnittflächen (Allgemeines) 196
Kollineation 70, 75
Konchoide 143
Konforme Abbildung 214
Konjugierte Punkte 96, 97, 111, 112, 200, Strahlenpaare 97, 113, Durchmesser 97, 113
Konoide 279
Konturbestimmung bei der Kugel 3, dem Kegel 6, Polyedern 22, 23, Umdrehungsflächen 182, Ellipsoid 209, Paraboloid 212, abwickelbaren Flächen 236, Kanalflächen 264, 265, Schraubenflächen 295, 296, 299, windschiefen Flächen 272
Koordinatensystem 42, -abtragung 46, 51
Kotierte Projektion 300
Kreisprojektion 15, 123
Kreisring 192, 264
Kreisschnitte einer Kegelfläche 216, eines Paraboloids 214, 215, der übrigen Kegelschnittflächen 217, 218, der geraden Normalfläche 290, 291
Kreuzliniensatz 84, 87
Krümmungskreis (oder Schmiegungskreis) eines Normbogens 145, 150, 151, eines Kegelschnitts 129, 130, 132, 133, 134, einer Rollkurve 161, einer Raumkurve und ihrer Projektion 231, einer Schraubenlinie 255, der Durchdringungskurve zweier Umdrehungsflächen in besonderen Punkten 232, der Abwickelung einer Kurve auf einer abwickelbaren Fläche 239, 241, einer praktischen Kurve 141
Kugel 3, 11, 26, 211, 249, 308, 309
Kugelpunkte 218

L.

Länge der Evolute 154
Lagenbeziehung der Schmiegungsebene zum Kurvenbogen 223, 228, des Krümmungskreises zum Kurvenbogen 151
Leitkreis eines Kegelschnittes 106
Leitkurven u. *Leitflächen* bei abwickelbaren Flächen 260, bei windschiefen Flächen 268, 276
Leitlinie eines Kegelschnitts 102, 104, 105

M.

Meridianebenen u. *Meridiankurven* bei Umdrehungs- und Schraubenflächen 179, 293
Meridiankurve einer abwickelbaren Schraubenfläche 256
*Mittel*ebene 36, -spur 37
Mittlere Krümmung 144
Momentanbewegung einer ebenen Figur, Momentanpol 142, 143
Momentanpol einer Rollbewegung 156—160

N.

Nabelpunkt 218
Nebenachse einer Hyperbel 104
Niveaukurven 302

Normale einer Fläche 177, einer windschiefen Fläche 271, 273
Normalen einer Schraubenlinie, die zu einer festen Linie senkrecht sind 259
Normalflächen 286
Normbogen 144
Normkurve 154

O.

Orientierung b. doppelter Projektion 19
Orthogonale Axonometrie 50, Strahleninvolution 93
Ovalwerk 114

P.

Parabel als Schnitt eines Rotationskegels 104, 107, als perspektive Figur eines Kreises 128
Parabelkonstruktionen 107—108, 117—120
Paraboloid, elliptisches 205, 215 hyperbolisches 206, 207, 208, 212, 218, 271, 272, 277
Parallele Durchmesserebenen eines Paraboloids 205, Schnitte einer Kegelschnittfläche 201
*Parallel*kreise 179, -kurven einer Ellipse 156, -kurven eines Normbogens 145, -perspektive Figuren 37, -projektion 40, -projektion einer Ellipse 115, 116, einer Parabel 119, einer Hyperbel 121, einer Schraubenlinie 257
Parameter einer Parabel 108, einer Erzeugenden einer windschiefen Fläche 188, 273
Pascalscher Satz für den Kreis 86, f. allgemeine Kegelschnitte 108, 109, 119, 121
Perspektive Figuren (Perspektivität, Perspektivische Kollineation) 69, 70, 75
Perspektivische Affinität 37, 38, 71, 78, Transformation einer einfachen Kurve 228
Plückersches Konoid 281
Pohlkes Satz 210
Pol u. *Polare* 94, 111
Pol und Polarebene 198
Polarfläche einer Raumkurve 264
Polkurven einer Bewegung 167
Potenz einer Involution 91
Praktische Konstruktion perspektivischer Bilder 62, Kurven, Raumkurven u. Flächen 141, 178, 179, Zeichnung von Normbögen 153
Prisma 25
Profil einer Ebene 5
Projektion einer Raumkurve 221, 227, 229, 231
Projektionsverhältnis 41
Projektive (o. perspektive) geradlinige Punktreihen in der Ebene 80, 83, 88, im Raume 207, Punktreihen auf dem Kreis 86, 87, 88, Strahlenbüschel 81, 85, 89, Ebenenbüschel 82, 83, 207

Q.

Querlinien 5

R.

Raumkurven 175, 219
Raumperspektive 76
Rechtserzeugende und Linkserzeugende eines Hyperboloids 185
Rechtsgängige und linksgängige Schraubenlinien 253
Reduzierte Ganghöhe 253
Rektifikation eines Kreises 139
Reliefperspektive 78
Richtungsebene 207, 271
Richtungskegel einer Raumkurve 219, einer abwickelbaren Fläche 236, einer windschiefen Fläche 271
Rinnlinie 303
Rollkurven 156

S.

Satz v. umschriebenen Viereck 111, 115, 118
Scharfgängige Schrauben 299
Schattenkonstruktionen 305
Scheitel eines Kegelschnitts 16, 104, 105, 122, 130, 134, eines

ebenen Schnitts einer Umdrehungsfläche 183, 184
Schiefer Durchgang 283, als Ort für die Projektionen einer festen Linie auf die Tangentialebenen eines Zylinders 286
Schlangenfläche 265
Schmiegungsebene eines einfachen Bogens 220, 223, 224, der Schraubenlinie 253, in besonderen Punkten der Schnittkurve zweier Kegel 242, 246, der Schnittkurve zweier Umdrehungsflächen 232, einer einfachen Kurve 228
Schmiegungshalbebene 224
Schmiegungskreis 140 (s. Krümmungskreis)
Schmiegungshyperboloid eines Kreisringes 193
Schnittlinie zweier Ebenen 9, 21, 32, 33, 43, 59, 302
Schnittkurve (s. Durchdringung)
Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene 10, 22, 44, 60, 302, Kegel oder Zylinder 8, Dreiecksfläche 27, Kugel 4, Polyeder 28, Umdrehungsfläche 190, Umdrehungsellipsoid 195, Ellipsoid 211, Konoid 280, Ellipse 116, Parabel 119, 120, Hyperbel 121, 122, 189, beliebigem Kegelschnitt 106, 109, 112, 127
Schnittpunkte eines Kegelschnitts mit einer beliebigen Kurve 106
Schräge Brücke 297
Schraubenlinie u. -bewegung 253
Schraubenflächen 293
Singuläre Erzeugende einer windschiefen Fläche 274
Simuslinie 255
Speerpunkt 274
Spitzkante (Definition) 178, einer abwickelbaren Fläche 236, einer Kanalfläche 264, einer Schlangenfläche 267
Steinerscher Satz 131
Stereographische Projektion 213
Striktionslinie 276, des Paraboloids 277, des allg. Hyperboloids 277, eines Konoids 279, einer geradlinigen Schraubenfläche 295, 298, einer Normalfläche eines Kegels 292
Strophoide 300
Symmetrische Strahleninvolution 94
Symmetrieebenen einer Kegelschnittfläche 202, 205, einer Kegelfläche zweiter Ordnung 204

T.

Tangenten einer beliebigen Kurve 135, 175, eines Kegelschnitts 105, 106, 107, 109, im Doppelpunkte einer Schnittkurve 192, 244—246
Tangentenfläche einer Raumkurve 255 ff.
Tangentialebene (Existenzbeweis) 177, einer Umdrehungsfläche 179, 181, Kegelschnittfläche 196, abwickelbaren Fläche 235, eines Umdrehungshyperboloids 185, 187, einer windschiefen Fläche 270—272, einer Schraubenfläche 293, 296, 298; durch einen gegebenen Punkt an einen Kegel 8; durch eine gegebene Gerade an eine Kugel 11, an eine Umdrehungsfläche 190
Teilpunkte 61
Totalkrümmung 144

U.

*Umdrehungs*flächen 179, -hyperboloid 184, 194, 195, -kegelschnittflächen 193
Umklappung einer ebenen Figur 6, 21, 23, 34, 49, 50, 52, 61, 73
Unendlich ferne Linie u. Ebene 55
Unendlich ferne Punkte 54, einer Hyperbel 103, einer Parabel 104, 105, einer beliebigen Kurve 140—141, 175, einer Fläche 177, einer Umdrehungsfläche 180, einer Kegelschnittfläche 194, 203, 204, 207, einer abwickelbaren Fläche 236, einer windschiefen Fläche 271
Unendlich ferner Kegelschnitt 126

V.

*Verschwindungs*ebene 57, -raum57
Vollständiges Viereck u. *Vierseit* 67—68

W.

Wendekreis 165
Wendelfläche 296
Wendepol 165
Wendepunkte 138, zyklischer Kurven 170, der Abwickelung einer Kurve 239, 241
Windelfläche 252
Windellinie 252.

Z.

Zeichnung von Normbögen 153
Zentralebene u. Zentralpunkt 187, 272
Zentralprojektion 57, eines Kreises 123, eines Kegelschnitts 124, eines einfachen Bogens 229
Zentrum einer Involution 90
Zylinder 8, 16, 26, 41, 56
Zylindroid 281

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

E. Pascals Repertorium der höheren Mathematik.

Zweite, völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe. Unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker herausgegeben von **P. Epstein**, Professor an der Universität Straßburg, und **H. E. Timerding**, Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. 2 Bände in 4 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band: **Analysis.** Unter Mitwirkung von R. Fricke, Ph. Furtwängler, A. Guldberg, H. Hahn, E. Hecke, E. Jahnke, H. Jung, G. Kowalewski, A. Loewy, E. Pascal, H. E. Timerding herausgegeben von **P. Epstein** und **R. Rothe.** I. Hälfte: Algebra, Differential- und Integralrechnung. [XV und 527 S.] 1910. *M* 10.— [Die II. Hälfte befindet sich unter der Presse.]

II. Band: **Geometrie.** Unter Mitwirkung von L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, F. Dingeldey, F. Enriques, G. Giraud, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Mollerup, J. Neuberg, U. Perazzo, O. Staude, E. Steinitz, H. Wieleitner und K. Zindler herausgegeben von **H. E. Timerding.** I. Hälfte: Grundlagen und ebene Geometrie. [XVI u. 534 S.] 1910. *M* 10.— [Die II. Hälfte befindet sich unt. d. Presse.]

Das Werk soll nicht bloß eine Übersicht über das weite Gebiet der Algebra, Analysis und Geometrie im einzelnen, sondern auch eine Darlegung ihrer allgemeinen Prinzipien und Methoden geben und von dem heutigen Stand der Forschungen Rechenschaft ablegen, soll so nicht bloß zur Führung und Orientierung während des mathematischen Studienganges dienen, es soll auch eine brauchbare Hilfe bei selbständiger wissenschaftlicher Arbeit gewähren.

Encyklopädie der Elementar-Mathematik.

Ein Handbuch für Lehrer und Studierende von **H. Weber** und **J. Wellstein.** In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band: **Elementare Algebra und Analysis.** Bearbeitet von H. Weber. 3. Aufl. Mit 40 Figuren. [XVIII u. 532 S.] 1909. . . . . *M* 10.—

II. Band: **Elemente der Geometrie.** Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Figuren. [XII u. 596 S.] 1907. *M* 12.—

III. Band: **Angewandte Elementar-Mathematik.** In 2 Teilen. 2. Auflage I. Teil: Mathematische Physik. Mit einem Buch über Maxima und Minima von H. Weber und J. Wellstein. Bearbeitet von Rudolf H. Weber, Professor in Rostock. Mit 254 Figuren. [XII u. 536 S.] 1910. *M* 12.— II. Teil: Darstellende Geometrie, graphische Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, politische Arithmetik und Astronomie. Bearbeitet von J. Wellstein, H. Weber, H. Bleicher, J. Bauschinger. Mit 271 Figuren. [X u. 671 S.] 1912. . . . . M. 14.—

Das Ziel dieser Arbeit ist nicht in der Vergrößerung des Umfanges der Elementarmathematik zu ersehen oder in der Einkleidung höherer Probleme in ein elementares Gewand, sondern in einer strengen Begründung und leicht faßlichen Darlegung der Elemente. Das Werk ist nicht sowohl für den Schüler selbst als für den Lehrer und Studierenden bestimmt.

Die mathematischen Wissenschaften.

(Die Kultur der Gegenwart, ihre Entwicklg. u. ihre Ziele, herausg. v. Prof. **Paul Hinneberg**, Teil III, Abt I.) Unt. Leitung v. **F. Klein.**

Inhalt: 1. **Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart.** Von A. Voß. 2. **Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung.** Von H. E. Timerding. (Nr. 1 u. 2 = 2. Lieferung [VI u. 161 S.] Lex.-8. 1914. Geh. *M* 6.—) 3. **Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter.** Von H. G. Zeuthen. (1. Lief. [IV u. 95 S.] Lex.-8. 1912. Geh. *M* 3.—) 4. **Die Mathematik im 16., 17. u. 18. Jahrhundert.** Von P. Stäckel. 5. **Die Mathematik der Neuzeit.** Von N. N. 6. **Über die mathematische Erkenntnis.** Von A. Voß. (3. Lief. [VI u. 148 S.] Lex.-8. 1914.)

1 und 2 geben solche Erörterungen über das Wesen und die Bedeutung der mathematischen Wissenschaften, die als solche jedem Gebildeten verständlich sein wollen. Die Hefte 3, 4 und 5 bringen sodann eine Schilderung des historischen Werdegangs unserer Disziplin. Die Bearbeiter nehmen an, daß diese Form der Darlegung, die mehr die allgemeinen Verknüpfungen als den besonderen Inhalt der aufeinanderfolgenden Entwickelungen hervortreten läßt, zu ihrem Verständnis zwar selbstverständlich einige mathematische Vorkenntnisse voraussetzen muß, aber doch sehr viel zugänglicher ist als eine systematische Darstellung, die ihre Wirkung erst bei strengem Fachstudium entfalten kann. In 6 wird sodann der schwierige Versuch gemacht, das Wesen der mathematischen Erkenntnis in einer dem heutigen Standpunkte entsprechenden Form mehr philosophisch darzulegen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Vorlesungen über darstellende Geometrie. Unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Technik. Von **Guido Hauck.** Herausg. v. Alfred Hauck. 2 Bde. gr. 8. I. Bd. mit 650 Fig. [XII u. 339 S.] 1912. Geh. ℳ 10.—, geb. ℳ 12.—. II. Bd. [In Vorb.]

Vorlesungen über darstellende Geometrie. Von **Gino Loria.** Deutsch v. Fr. Schütte. In 2 Teilen. Mit vielen Fig. gr. 8.
I. Teil: Die Darstellungsmethoden. [XI u. 219 S.] 1907. Geh. ℳ 6.—, geb. ℳ 7.—
II. Teil: Anwendungen auf ebenflächige Gebilde, Kurven u. Flächen. Mit 146 Fig. [XII u. 204 S.] 1913 Geh. ℳ 11.—, geb. ℳ 12.—
III. Teil: Geschichte der darstellenden Geometrie. [In Vorbereitung.]

Vorlesungen über darstellende Geometrie. Von **F. v. Dalwigk.** In 2 Bänden. gr. 8. Geb. I. Band: Die Methoden der Parallelprojektion. Mit 184 Fig. [XVI u. 364 S.] 1911. ℳ 13.— II. Bd: U. d. Pr.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. Von **Emil Müller.** In 2 Bänden. gr. 8.
I. Band. Mit 375 Fig. u. 3 Taf. [XIV u. 368 S.] 1908. Geb. ℳ 12.—
II. Band. 1. Heft. Mit 140 Fig. [VII u. 129 S.] 1912. Geh. ℳ 4.—
2. Heft in Vorb.

Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Mit einem Anhang: Welche Vorteile gewährt die Benutzung des Projektionsapparates im mathem. Unterricht? Von **Friedrich Schilling.** Mit 151 Fig. u. 5 Doppeltaf. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. Geh. ℳ 4.60, geb. ℳ 5.—

Darstellende Geometrie des Geländes. Von **R. Rothe.** Mit 82 Fig. [IV u. 67 S.] 1914. Kart. ℳ —.80.

Das militärische Aufnehmen. Unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der Kgl. Preußischen Landesaufnahme nebst einigen Notizen über Photogrammetrie und über die topographischen Arbeiten Deutschland benachbarter Staaten. Nach den auf der Kgl. Kriegsakademie gehaltenen Vorträgen bearbeitet von **B. Schulze.** Mit 129 Textabbildungen. [XIII u. 305 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. ℳ 8.—

Leitfaden der Kartenentwurfslehre. Für Studierende und deren Lehrer v. **K. Zöppritz.** Hrsg. v. A. Bludau. 2 Tle. gr. 8. Geb.
I. Teil: Die Projektionslehre. Mit 154 Fig. u. zahlr. Tabellen. 3. Aufl. [XII u. 240 S.] 1912. Geh. ℳ 9.—, in Leinw. geb. ℳ 10.—
II. Teil: Kartographie u. Kartometrie. Mit 12 Fig., 2 Tabell. u. 2 Taf. 2. Aufl. [VIII u. 109 S.] 1908. Geh. ℳ 3.60, in Leinw. geb. 4.40.

Allgemeine Kartenkunde. Ein Abriß ihrer Geschichte und ihrer Methoden. Von **H. Zondervan.** Mit 32 Fig. [X u. 210 S.] gr. 8. 1901. Geh. ℳ 4.60, in Leinw. geb. ℳ 5.20.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
501
H5

Hjelmslev, Johannes Trolle
Darstellende Geometrie

P&ASci.